勾股定理證明-A042

【作輔助圖】

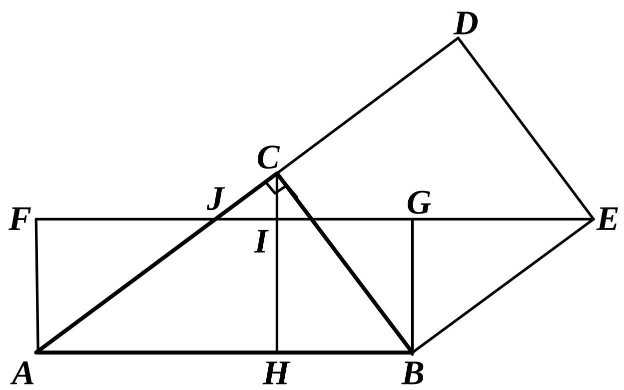
1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $BCDE$ 。

2. 從 E 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，且從 A 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，兩線交於 F 點。

3. 從 B 點作 $\overline{EF}$ 的垂線，交 $\overline{EF}$ 於 G 點。

4. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 H 點，交 $\overline{EF}$ 於 I 點。

5. 而 $\overline{AC}$ 與 $\overline{EF}$ 交於 J 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將等式整理，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACH 、三角形 CBH 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle AHC = 90°$ 且 $\angle CAB = \angle HAC$ ，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta CBH$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 CBH 相似可知： $\overline{BC} : \overline{BH} = \overline{AC} : \overline{BC}$ ，整理得

$$\overline{BH} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.$$

3. 說明四邊形 $ABEJ$ 為平行四邊形：

因為 $\overline{AB} // \overline{EJ}$ 且 $\overline{AJ} // \overline{BE}$ ，所以

四邊形 $ABEJ$ 為平行四邊形。

4. 利用不同的底與高求平行四邊形面積，將其等式比較，推出三角形的邊長關係：

平行四邊形 $ABEJ$ 以 $\overline{AB}$ 為底，則高為 $\overline{BG}$ ，又以 $\overline{BE}$ 為底，則高為 $\overline{BC}$ ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{BG} &= \overline{BE} \times \overline{BC} \\ \overline{BG} &= \frac{\overline{BE} \times \overline{BC}}{\overline{AB}} \\ \overline{BG} &= \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.\end{aligned}$$

5. 說明四邊形 $BGIH$ 為正方形：

因為 $\overline{HB} // \overline{GI}$, $\overline{HI} \perp \overline{GI}$ 且 $\overline{BG} \perp \overline{GI}$ 又 $\overline{BH} = \overline{BG}$ ，所以

四邊形 $BGIH$ 為正方形。

6. 將第 4 點的等式整理，推出另一等式：

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{BG} &= \overline{BE} \times \overline{BC} \\ \overline{AB} \times \overline{BH} &= \overline{BC} \times \overline{BC} \\ \overline{AB} \times \overline{BH} &= \overline{BC}^2.\end{aligned}$$

7. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 ACH 相似可知： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AH}$ ，整理得

$$\overline{AB} \times \overline{AH} = \overline{AC}^2.$$

8. 將第 6 點和第 7 點的等式相加整理，推出勾股定理的相關式：

$$\begin{aligned}\overline{AB}\times\overline{BH}+\overline{AB}\times\overline{AH}&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\\ \overline{AB}\times\left(\overline{BH}+\overline{AH}\right)&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\\ \overline{AB}\times\overline{AB}&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\\ \overline{AB}^2&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 39). Leipz.: Friese.
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 64). Amsterdam: A. Versluys
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 76). Paris: Vuibert et Nony.
   Johann Auguet Grunert (1855). *Archiv der Mathematik und Physik* (pp. 93-94).Greifswald: C. A. Koch.
2. 心得：

   此證明圖形與 A040 相同，但證明方式與 A040 完全不同，先利用三角形相似的性質，並了利用圖形不同的底對應到不同的高，來找出一些等式，並將等式整理，即可推出勾股定理，圖形的面積都很容易求，等式也不難整理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	