勾股定理證明-A041

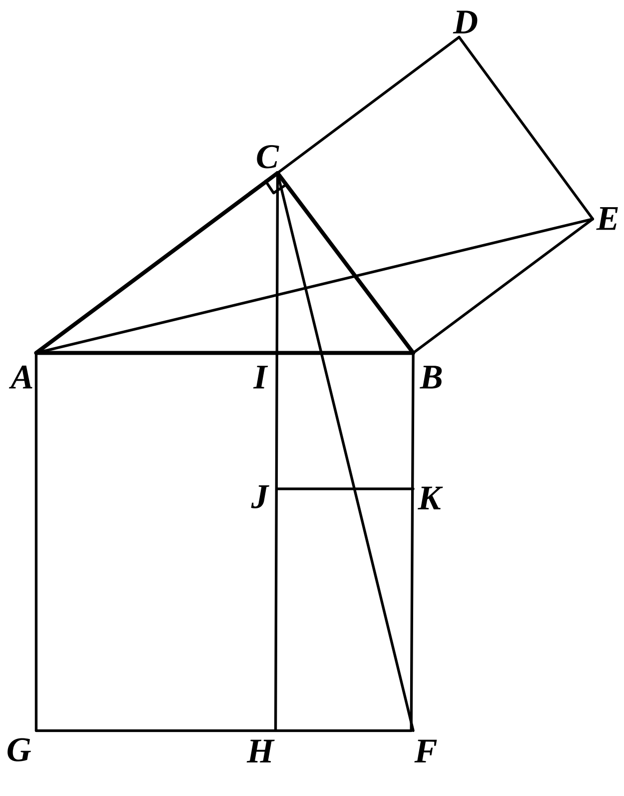
【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$BCDE$、正方形$ABFG$。

2. 從C點作$\overline{FG}$的垂線，交$\overline{FH}$於H點，交$\overline{AB}$於I點。

3. 分別在$\overline{IH}$，$\overline{BF}$上取一點J，K，使得$\overline{IJ}=\overline{BK}=\overline{BI}$。

4. 連接$\overline{AE}$，$\overline{CF}$，$\overline{JK}$。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，先說明圖中部分的三角形全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，並在整理時推出小的直角三角形有勾股定理的關係式，最後利用同理，推出直角三角形ABC中，也有勾股定理的相關式。

1. 首先證明三角形ABE與三角形FBC全等：

因為$\overline{AB}=\overline{FB}$，$\overline{BE}=\overline{BC}$且

$$
\begin{aligned}
\angle ABE &= \angle ABC + \angle CBE \\
&= \angle ABC + 90^\circ \\
&= \angle ABC + \angle ABF \\
&= \angle FBC,
\end{aligned}
$$

所以可推得

$$\Delta ABE \cong \Delta FBC \text{ (SAS 全等)}.$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 ACI 、三角形 CBI 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle AIC = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle IAC$，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ACI$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta CBI$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ACI \sim \Delta CBI.$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ACI 與三角形 CBI 相似可知： $\overline{AI} : \overline{CI} = \overline{CI} : \overline{BI}$ ，整理得

$$\overline{AI} \times \overline{BI} = \overline{CI}^2.$$

4. 說明四邊形 $BKJI$ 為正方形：

   因為 $\overline{IJ} \perp \overline{BI}$, $\overline{BK} \perp \overline{BI}$ 且 $\overline{BK} = \overline{IJ} = \overline{BI}$ ，所以

四邊形 $BKJI$ 為正方形。

5. 矩形 $BFHI$ 利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出直角三角形邊長的關係式：

   矩形 $BFHI$ 可以拆成矩形 $FHJK$ 與正方形 $BKJI$ 相加，而矩形 $BFHI$ 又是三角形 BCF 面積的兩倍，即

$$
\begin{aligned}
\square BKJI + \square FHJK &= 2 \times \Delta BCF \\
\overline{BI} \times \overline{IJ} + \overline{JK} \times \overline{KF} &= 2 \times \Delta ABE \\
\overline{BI} \times \overline{IJ} + \overline{JK} \times \left(\overline{BF} - \overline{BK}\right) &= 2 \times \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{BE} \\
\overline{BI} \times \overline{IJ} + \overline{JK} \times \left(\overline{AB} - \overline{IB}\right) &= \overline{BC} \times \overline{BE} \\
\overline{BI}^2 + \overline{AI} \times \overline{IB} &= \overline{BC}^2 \\
\overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 &= \overline{BC}^2.
\end{aligned}
$$

6. 最後利用同理，推出直角三角形 ABC 中，也有勾股定理的相關式：

因為三角形 ABC 與三角形 BCI 相似，且在 $\angle I$ 為直角的直角三角形 BCI 中，可推出 $\overline{BI}^2=\overline{CI}^2+\overline{BI}^2$ 的等式，所以同理，在 $\angle C$ 為直角的直角三角形 ABC 中，可知有 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 的等式，即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum I— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 359.
2. 心得：
   此證明技巧與 A040 相同，無法直接推出在直角三角形 ABC 中有勾股定理的等式，而是去推出在小的直角三角形中有勾股定理的等式，並利用同理推論所有直角三角形皆符合勾股定理的等式，學生閱讀時可能會較無法理解，因為較少看到用同理來推論。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	