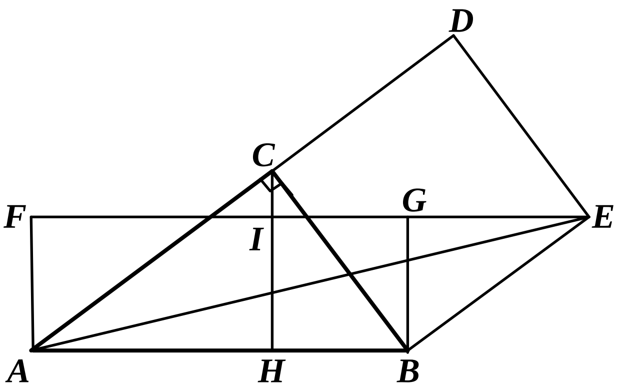
勾股定理證明-A040

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $BCDE$。
2. 從 E 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，並從 A 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交平行線於 F 點。
3. 從 B 點作 $\overline{EF}$ 的垂線，交 $\overline{EF}$ 於 G 點。
4. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 H 點，交 $\overline{EF}$ 於 I 點。
5. 連接 $\overline{AE}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，並在整理時推出小的直角三角形有勾股定理的關係式，最後利用同理，推出直角三角形 ABC 中，也有勾股定理的相關式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACH、三角形 CBH 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle AHC = 90°$ 且 $\angle CAB = \angle HAC$，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta CBH$，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 CBH 相似可知：$\overline{BC} : \overline{BH} = \overline{AB} : \overline{BC}$，整理得

$$\overline{BH} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.$$

3. 利用不同的底與高求三角形面積，將其等式比較，推出三角形的邊長關係：

三角形 ABE 以 $\overline{AB}$ 為底，則高為 $\overline{BG}$ ，又以 $\overline{BE}$ 為底，則高為 $\overline{BC}$ ，比較面積的不同呈現方式，整理得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BG} &= \frac{1}{2}\overline{BE}\times\overline{BC} \\
\overline{AB}\times\overline{BG} &= \overline{BE}\times\overline{BC} \\
\overline{BG} &= \frac{\overline{BE}\times\overline{BC}}{\overline{AB}} \\
\overline{BG} &= \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.
\end{aligned}$$

4. 說明四邊形 $BGIH$ 為正方形：

因為 $\overline{HB}\,//\,\overline{GI}$, $\overline{HI}\perp\overline{GI}$ 且 $\overline{BG}\perp\overline{GI}$ ，又 $\overline{BH}=\overline{BG}$ ，所以

四邊形 $BGIH$ 為正方形。

5. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ACH 與三角形 CBH 相似可知： $\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$ ，整理得

$$\overline{AH}\times\overline{BH}=\overline{CH}^2.$$

6. 將第 3 點的等式整理，推出直角三角形邊長的關係式：

$$\begin{aligned}
\overline{BE}\times\overline{BC} &= \overline{AB}\times\overline{BG} \\
\overline{BE}\times\overline{BC} &= \left(\overline{AH}+\overline{HB}\right)\times\overline{BG} \\
\overline{BE}\times\overline{BC} &= \overline{AH}\times\overline{BG}+\overline{HB}\times\overline{BG} \\
\overline{BC}^2 &= \overline{AH}\times\overline{BH}+\overline{BH}^2 \\
\overline{BC}^2 &= \overline{CH}^2+\overline{BH}^2.
\end{aligned}$$

7. 最後利用同理，推出直角三角形 ABC 中，也有勾股定理的相關式：

因為三角形 ABC 與三角形 BCH 相似，且在 $\angle H$ 為直角的直角三角形 BCH 中，可推出 $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$ 的等式，所以同理，在 $\angle C$ 為直角的直角三角形 ABC 中，可知有 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 的等式，即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 382.
2. 心得：
   此證明無法直接推出在直角三角形 ABC 中有勾股定理的等式，而是利用三角形相似的性質，來找出一些等式，去推出在小的直角三角形中有勾股定理的等式，並利用同理推論所有直角三角形皆符合勾股定理的等式，學生閱讀時可能會較無法理解，因為較少看到用同理來推論。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	