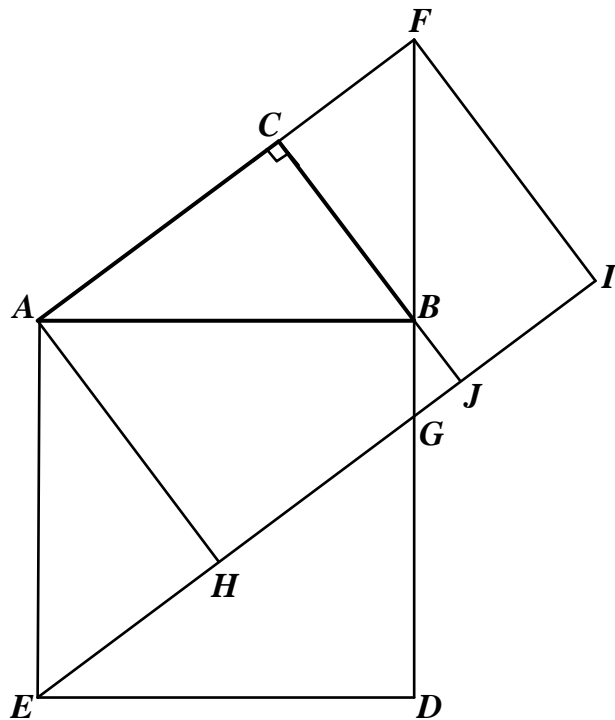


勾股定理證明-A039

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊長向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 從 B 點作 \overline{AB} 的垂線，交 \overline{AC} 於 F 點。
3. 從 E 點作 \overline{AC} 的平行線，交 \overline{BD} 於 G 點。
4. 從 A 點作 \overline{EG} 的垂線，交 \overline{EG} 於 H 點。
5. 從 F 點作 \overline{BC} 的平行線，交 \overline{EG} 於 I 點。
6. 將 \overline{BC} 延長，交 \overline{EI} 於 J 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外做輔助線，先說明圖中部分的三角形全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將圖中的平行四邊形用兩種不同方法來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 AEH 全等，並利用兩三角形全等，推出四邊形 $ACJH$

為正方形：

因為 $\overline{AE} = \overline{AB}$ ， $\angle AHE = \angle ACB = 90^\circ$ 且

$$\begin{aligned}\angle EAH &= 90^\circ - \angle BAH \\ &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= \angle BAC,\end{aligned}$$

所以

$$\triangle AEH \cong \triangle ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

由此可知： $\overline{AH} = \overline{AC}$ ，又因為 $\overline{EI} \parallel \overline{AC}$ 且 $\angle CAH = \angle ACH = 90^\circ$ ，所以

四邊形 $ACJH$ 為正方形，面積為 \overline{AC}^2 。

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 ACF 、三角形 BFC 皆相似：

因為 $\angle ACB = \angle ABF = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle BAF$ ，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle AFB$ (AA 相似)，同理，可推得 $\triangle AFB \sim \triangle BFC$ ，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle AFB \sim \triangle BFC.$$

3. 由三角形 ABC 與三角形 BFC 相似可知： $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CF}$ ，整理得

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC} \times \overline{CF}.$$

4. 說明四邊形 $CFIJ$ 為長方形，並求出面積：

因為 $\overline{FI} \parallel \overline{CJ}$ ， $\overline{EI} \parallel \overline{CF}$ 且 $\overline{JI} \perp \overline{CJ}$ ，所以四邊形 $CFIJ$ 為長方形，而面積為

$$\begin{aligned}\square CFIJ &= \overline{CF} \times \overline{CJ} \\ &= \overline{CF} \times \overline{AC} \\ &= \overline{BC}^2.\end{aligned}$$

5. 最後將平行四邊形 $AEGF$ 用不同的底與高求面積，並整理推出勾股定理的相關式：

平行四邊形 $AEGF$ 以 \overline{AE} 為底，則高為 \overline{AB} ，又以 \overline{AF} 為底，則高為 \overline{AH} ，比較面積

的不同呈現方式，整理得

$$\overline{AE} \times \overline{AB} = \overline{AF} \times \overline{AH}$$

$$\square ABDE = \square AFIH$$

$$\square ABDE = \square ACJH + \square CFIJ$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 84). Amsterdam: A. Versluys.

J. Camirs (1889). *Mathématiques : Démonstrations élémentaires du théorème de Pythagore. Revue Scientifique, 1.*

2. 心得：此證明是先利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並找到圖上一些圖形的面積，並利用圖形不同的底對應到不同的高，即可推出勾股定理，雖然要算的圖形面積很多，但都不難求，所以是滿容易整理的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	