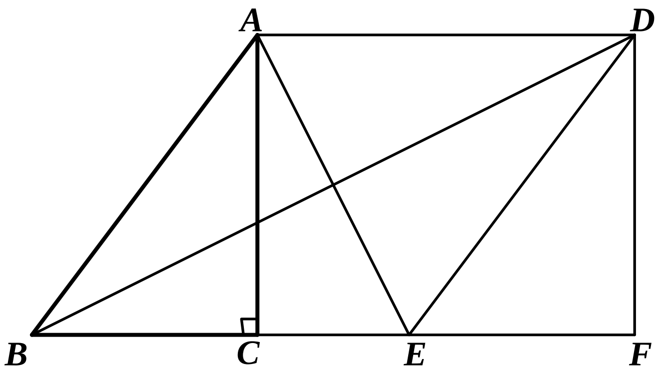
勾股定理證明-A038

【作輔助圖】

1. 將三角形 ABC 往右邊平移長度為 $\overline{AB}$ 的距離，產生新的三角形 DEF 。

2. 連接 $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的三角形，先說明圖中部分的三角形相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先說明四邊形 $ABED$ 為菱形，並推得兩對角線互相垂直：

   因為三角形 ABC 往右邊平移長度為 c 的距離，所以 $\overline{BE}=\overline{AD}=c$ 且 $\overline{AB}=\overline{DE}=c$ ，可推得

   $$\text{四邊形 } ABED \text{ 為菱形，}$$

   由此可知：

   $$\overline{AE}\perp\overline{BD}.$$

2. 證明三角形 ACE 與三角形 BFD 相似，並推出兩三角形的邊長關係，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

   因為 $\angle DBF=90°-\angle AEC=\angle CAE$ 且 $\angle BFD=\angle ACE=90°$ ，所以

   $$\Delta BFD\sim\Delta ACE\ (\text{AA 相似}).$$

   由此可知： $\overline{AC}:\overline{BF}=\overline{CE}:\overline{DF}$ ，整理得

$$\overline{AC}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{BF}$$
$$\overline{AC}\times\overline{DF}=\left(\overline{BE}-\overline{BC}\right)\times\left(\overline{BE}+\overline{EF}\right)$$
$$\overline{AC}\times\overline{AC}=\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)\times\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)$$
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Marcelo Brafman (2014). Another Algebraic Pythagorean Proof, *The American Mathematical Monthly, 121*(7), 589.
2. 心得：
   此證明是利用平移的技巧，產生其他新的三角形，在魯米斯的《勾股定理》這本書中，較少利用此技巧來作輔助圖，而且此證明僅簡單利用三角形相似的性質，就可以推出勾股定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：
   在魯米斯的《勾股定理》這本書，原本的 A038 與 A001 一模一樣，所以將其刪除，此證明是出自 The American Mathematical Monthly，與書中原本的 A038 並不相同。