勾股定理證明-A037

【作輔助圖】

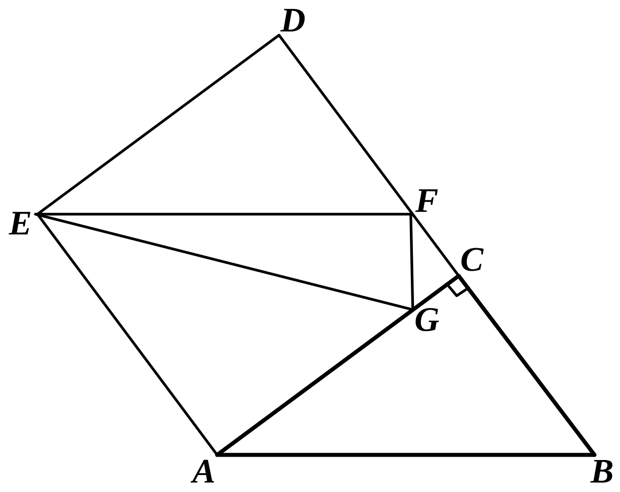
1. 以 $\overline{AC}$ 為邊長向外作正方形 $ACDE$。

2. 在 $\overline{CD}$ 取一點 F，使得 $\overline{DF}=\overline{BC}$。

3. 連接 $\overline{EF}$。

4. 從 F 點作 $\overline{EF}$ 的垂線，交 $\overline{AC}$ 於 G 點。

5. 連接 $\overline{EG}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中部分的三角形皆全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將正方形利用拆解的方式來算面積，再將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 EDF 全等：

   因為 $\overline{DE}=\overline{AC}$，$\overline{FD}=\overline{BC}$ 且 $\angle EDF=\angle ACB=90^\circ$，所以可推得

   $$\Delta EDF\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 FGC 相似，並推出兩三角形的邊長關係：

   因為 $\angle GCF=\angle ACB=90^\circ$ 且

$$\begin{aligned}\angle CFG &= 180^\circ - \angle DFG \\ &= 90^\circ - \angle DFE \\ &= \angle DEF \\ &= \angle BAC,\end{aligned}$$

所以可推得

$$\Delta FGC \sim \Delta ABC\ (\text{AA 相似}),$$

由此可知：$\overline{FG}:\overline{AB}=\overline{CF}:\overline{AC}$，整理得

$$\overline{FG}=\frac{\overline{AB}\times\overline{CF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}\times\left(\overline{CD}-\overline{DF}\right)}{\overline{AC}}=\frac{c\times(b-a)}{b},$$

又可知：$\overline{CG}:\overline{BC}=\overline{CF}:\overline{AC}$，整理得

$$\overline{CG}=\frac{\overline{BC}\times\overline{CF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}\times\left(\overline{CD}-\overline{DF}\right)}{\overline{AC}}=\frac{a\times(b-a)}{b}.$$

3. 最後正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

將正方形 $ACDE$ 拆解成三角形 AEG、三角形 CFG、三角形 DEF、三角形 EFG，即

$$\begin{aligned}\square ACDE &= \Delta AEG+\Delta CFG+\Delta DEF+\Delta EFG \\ b^2 &= \frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{AG}+\frac{1}{2}\overline{CF}\times\overline{CG}+\frac{1}{2}\overline{DE}\times\overline{DF}+\frac{1}{2}\overline{EF}\times\overline{FG} \\ 2b^2 &= \overline{AE}\times\left(\overline{AC}-\overline{CG}\right)+\overline{CF}\times\overline{CG}+\overline{DE}\times\overline{DF}+\overline{EF}\times\overline{FG} \\ 2b^2 &= b\times\left[b-\frac{a\times(b-a)}{b}\right]+(b-a)\times\frac{a\times(b-a)}{b}+b\times a+c\times\frac{c\times(b-a)}{b} \\ 2b^2 &= b^2-ab+a^2+\frac{a\times(b-a)^2}{b}+ab+\frac{c^2\times(b-a)}{b} \\ b^2-a^2 &= \frac{a\times(b-a)^2}{b}+\frac{c^2\times(b-a)}{b} \\ b(b+a)(b-a) &= (b-a)\times\left[a\times(b-a)+c^2\right] \\ b(b+a) &= ab-a^2+c^2 \\ b^2+ab &= ab-a^2+c^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (pp. 73-74). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明是利用求正方形 *ACDE* 面積的過程中推出勾股定理，可以直接利用邊長來算，或利用拆解的方式來求，而拆解後的三角形面積，則是利用三角形相似的性質來找出，從輔助圖看起來並不難，但找出的邊長很難計算，所以整理過程非常冗長。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				