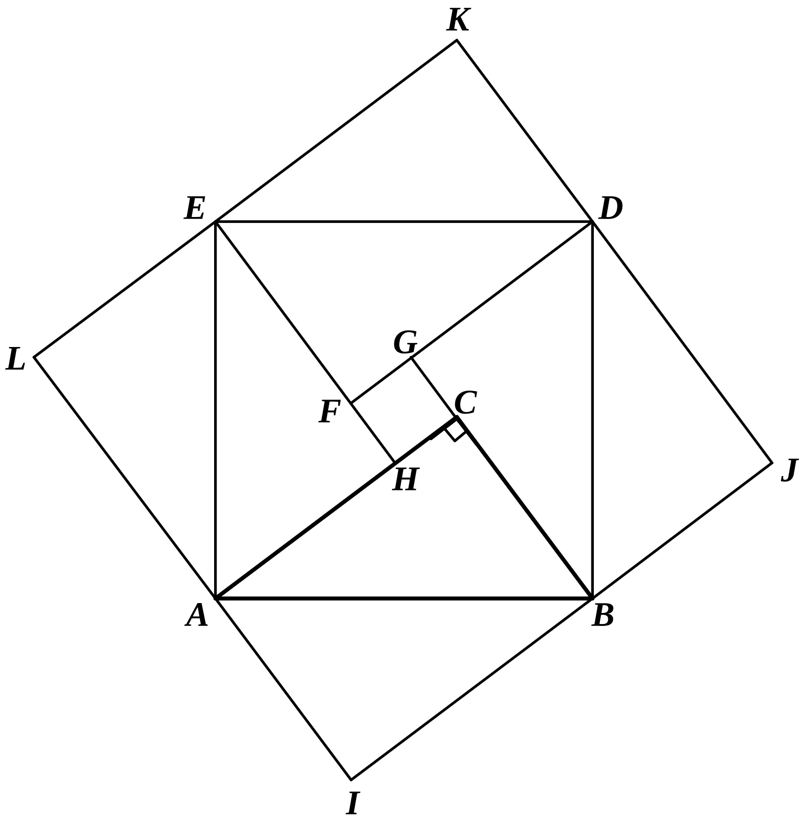
勾股定理證明-A036

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$ABDE$。
2. 在正方形$ABDE$裡取一點F，使得$\overline{DF}=\overline{AC}$且$\overline{EF}=\overline{BC}$。
3. 延長$\overrightarrow{BC}$，交$\overline{DF}$於G點，延長$\overrightarrow{EF}$，交$\overline{AC}$於H點。
4. 在正方形$ABDE$外取一點I，使得$\overline{AI}=\overline{BC}$且$\overline{BI}=\overline{AC}$。
5. 在正方形$ABDE$外取一點J，使得$\overline{BJ}=\overline{DG}$且$\overline{DJ}=\overline{BG}$。
6. 在正方形$ABDE$外取一點K，使得$\overline{DK}=\overline{EF}$且$\overline{EK}=\overline{DF}$。
7. 在正方形$ABDE$外取一點L，使得$\overline{EL}=\overline{AH}$且$\overline{AL}=\overline{EH}$。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中部

分的三角形皆全等，最後將大正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 DEF 、三角形 EAH 、三角形 BDG 皆全等：

因為 $\overline{DF}=\overline{AC}$, $\overline{EF}=\overline{BC}$ 又 $\overline{AB}=\overline{DE}$ ，所以可推得

$$\Delta DEF \cong \Delta ABC \text{ (SSS 全等)}.$$

又因為 $\angle EAH = 90° - \angle BAC = \angle ABC$, $\angle AEH = 90° - \angle DEF = \angle EDF = \angle BAC$ ，且 $\overline{EA}=\overline{AB}$ ，所以可推得

$$\Delta EAH \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

同理可推得 $\Delta BDG \cong \Delta ABC$ ，由此可知：

$$\Delta EAH \cong \Delta BDG \cong \Delta DEF \cong \Delta ABC.$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 BAI 、三角形 DBJ 、三角形 EDK 、三角形 AEL 也皆全等：

因為 $\overline{AI}=\overline{BC}$, $\overline{BI}=\overline{AC}$ 又 $\overline{AB}=\overline{AB}$ ，所以可推得

$$\Delta BAI \cong \Delta ABC \text{ (SSS 全等)}.$$

同理，可推得

$$\Delta BAI \cong \Delta DBJ \cong \Delta EDK \cong \Delta AEL \cong \Delta ABC.$$

3. 說明四邊形 $IJKL$ 為正方形：

因為

$$\begin{aligned}\angle IBJ &= \angle IBA + \angle ABD + \angle DBJ \\ &= \angle BAC + 90° + \angle ABC \\ &= 90° + 90° \\ &= 180°,\end{aligned}$$

可推得 $I-B-J$ 共線，所以同理可推得 $J-D-K$ ； $K-E-L$ ； $M-A-I$ 皆共線，

由此可知，$IJKL$ 為四邊形，而四邊形 $IJKL$ 邊長皆為 $\overline{AC}+\overline{BC}$ ，且四個角皆為 $90°$ ，所以

$$\text{四邊形 } IJKL \text{ 為正方形。}$$

4. 將大正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，求出正方形面積：

   將正方形 $IJKL$ 拆解成三角形 ABI 、三角形 BDJ 、三角形 DEK 、三角形 AEL 、正方形 $ABDE$ ，即

$$\begin{aligned}\square IJKL &= \Delta ABI+\Delta BDJ+\Delta DEK+\Delta AEL+\square ABDE\\ \left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)^2 &= 4\times\Delta ABC+\overline{AB}^2\\ (a+b)^2 &= 4\times\frac{1}{2}ab+c^2\\ (a+b)^2 &= 2ab+c^2.\end{aligned}$$

5. 再將另一個正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，求出正方形面積：

   將正方形 $ABDE$ 拆解成三角形 AEH 、三角形 BDG 、三角形 DEF 、三角形 ABC 、正方形 $CFGH$ ，即

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AEH+\Delta BDG+\Delta DEF+\Delta ABC+\square CGFH\\ c^2 &= 4\times\Delta ABC+\left(\overline{DF}-\overline{DG}\right)^2\\ c^2 &= 4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2\\ c^2 &= 2ab+(b-a)^2.\end{aligned}$$

6. 將第 4 點及第 5 點的等式相減整理，推出勾股定理的相關式：

$$\begin{aligned}(a+b)^2-c^2 &= c^2-(b-a)^2\\ a^2+2ab+b^2-c^2 &= c^2-b^2+2ab-b^2\\ 2c^2 &= 2a^2+2b^2,\end{aligned}$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

這個證明最早是來自趙爽在《周髀算經注》中的「勾股圓方圖」，除此之外還收錄於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 72). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

此證明與 A035 的圖形相當類似，利用拆解的方式，將相同的正方形用兩個不同等式表示，比較後即可推出勾股定理，雖然拆解後圖形較多，但作圖時有設計過，三角形皆與原本的三角形 *ABC* 相同，所以很容易計算，很早之前在中國就有出現的證明方式，算是相當經典的證明方法之一。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

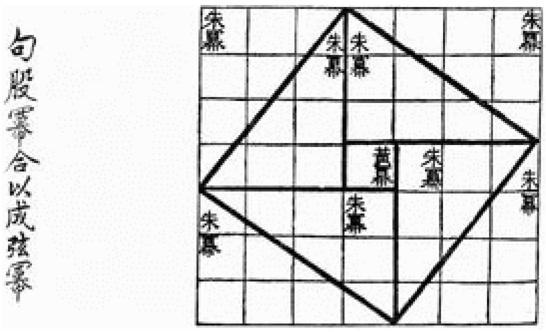
4. 補充：簡述趙爽與婆什迦羅證明勾股定理的故事：

趙爽，字君卿，又名嬰，東漢末至三國時代的吳國人。生平不詳，大約生活於公元 3 世紀初。據史料記載，趙爽曾經研究過張衡的天文數學著作《靈憲》和劉洪的《乾象歷》，也提到過“算術”，他對數學有深刻的理解。

而勾股定理的敘述最早見於《周髀算經》（大約成書於公元前一世紀前的西漢時期），書中有一段商高（約前 1120）答周公問中有「勾廣三，股修四，經隅五」的話，意即直角三角形的兩條直角邊是 3 及 4、則斜邊是 5。書中還記載了陳子答榮方問：「若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，並而開方除之、得邪至日」，古漢語中邪作斜解，因此這一句話明確陳述了勾股定理的內容，這是勾股定理的特例，因此它又被稱為商高定理。它說明早在商高那個年代，人們就在討論這個問題的解法了。

趙爽在數學上最主要的貢獻是，他在公元 222 年，深人研究了《周髀算經》，不僅為該書寫了序言，還作了非常詳細的註釋。他的工作有圖為證，永載史冊。趙爽在《周髀算經註》中，逐段解釋《周髀算經》的內容，而最為精彩的是附錄於首章的“勾股圓方圖”，短短 500 餘字，附圖六張，概括了《周髀算經》、《九章算術》以來中國人關於勾股算術的成就，其中包含了勾股定理。

趙爽的《周髀算經註》是數學史上極有價值的文獻。它記述了勾股定理的理論證明，將勾股定理表述為：“勾股各自乘，並之，為弦實。開方除之，即弦。”證明方法敘述為：“按弦圖，又可以勾股相乘為朱實二，倍之為朱實四，以勾股之差自相乘為中黃實，加差實，亦成弦實。”他撰成《勾股圓方圖說》，附錄於《周髀》首章的注文中，勾股圖說。短短五百多字，簡練地總結了後漢時期勾股算術的輝煌成就，不僅勾股定理和其它關於勾股弦的恆等式獲得了相當嚴格的證明，並且對二次方程解法提供了新的意見。



趙爽在《周髀算經》注中給出的《勾股圓方圖注》是勾股定理最早的證明。趙爽是利用割補法證明了勾股定理的。他畫了一張“弦圖”，如上圖，其中每一個直角三角形稱為“朱實”，中間的一個小正方形叫“中黃實”，以弦為邊的叫“弦實”。由於四個朱實加上一個中黃實就等於弦實，趙爽就是這樣利用割補法證明了勾股定理。

趙爽的這個證明可謂別具匠心，極富創新意識。他用幾何圖形的截、割、拼、補來證明代數式之間的恆等關係，既具嚴密性，又具直觀性，為中國古代以形證數、形數統一、代數和幾何緊密結合、互不可分的獨特風格樹立了一個典範。以後的數學家大多繼承了這一風格並且代有發展。

趙爽用非常優美的方法—弦圖，該圖不僅代表了古代中國曾經為世界數學的發展做出過重要貢獻，也被 2002 年在在中國北京舉辦地第 24 屆國際數學家大會組委會選為大會的會標。

該圖形旋轉起來很像一個風車，既反映中國人在數學研究中的創新精神，又代表了熱情好客的中國人民的心願，選擇它作為第 24 屆國際數學家大會的會標是非常有意義的。它代表了中國古代的數學家研究勾股定理所做出的數學貢獻，我們在記住這個圖標的同時也記住了中國古代的數學家趙爽證明勾股定理的方法，是一個具有豐富內涵與象徵的圖標。