勾股定理證明-A035

【作輔助圖】

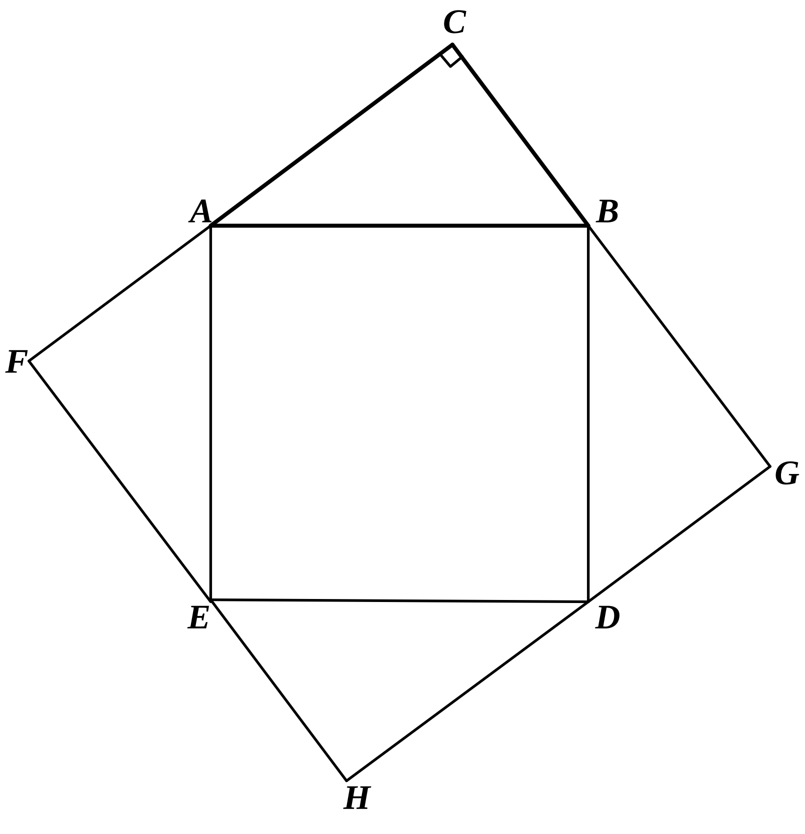
〈圖一〉

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE$ 。

2. 將 $\overline{AC}$ 延長到 F 點，使得 $\overline{AF}=\overline{BC}$ 。

3. 將 $\overline{BC}$ 延長到 G 點，使得 $\overline{BG}=\overline{AC}$ 。

4. 連接 $\overline{EF}$, $\overline{DG}$ ，並將 $\overline{EF}$, $\overline{DG}$ 延長交於 H 點。



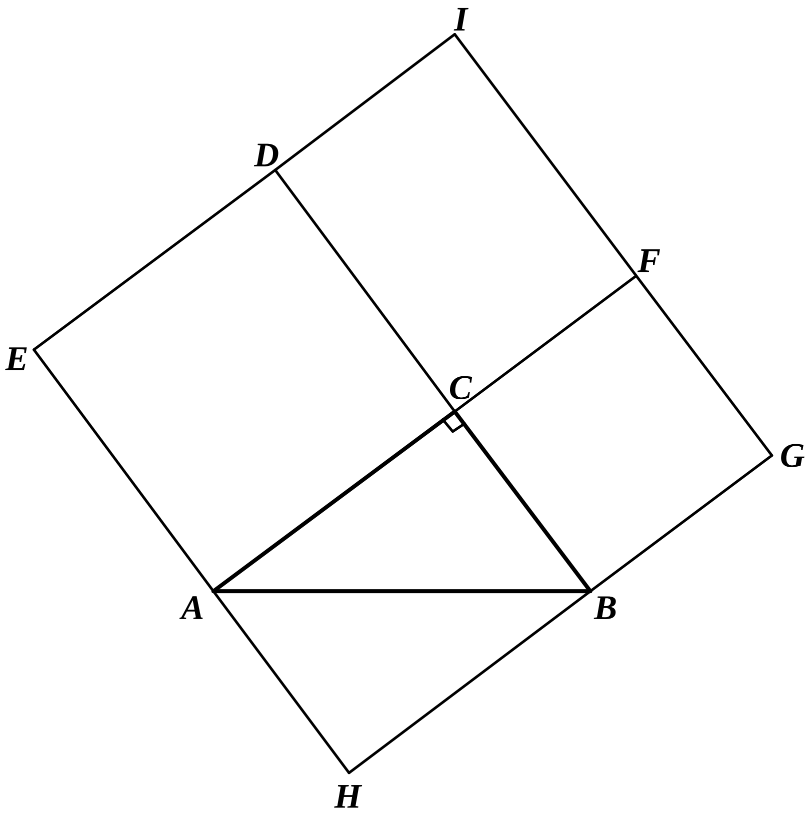
〈圖一〉

〈圖二〉

1. 分別以 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $ACDE$ 、正方形 $BCFG$ 。

2. 分別將 $\overline{AE}$, $\overline{BG}$ 延長，兩線交於 H 點。

3. 分別將$\overline{DE}$，$\overline{FG}$延長，兩線交於I點。



〈圖二〉

【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，用兩種不同作圖方式，作出兩個面積相等的正方形，先說明圖中部分的三角形皆全等，再將兩正方形的面積求出，最後將兩正方形面積相等的等式比較，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明圖一中的三角形ABC與三角形EAF、三角形BDG、三角形DEH皆全等：

圖一中，因為$\overline{AF}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AE}$又$\angle FAE=90^\circ-\angle BAC=\angle ABC$，推得$\Delta EAF\cong\Delta ABC$(SAS 全等)，同理，可推得$\Delta BDG\cong\Delta DEH\cong\Delta ABC$，所以

$$\Delta EAF\cong\Delta BDG\cong\Delta DEH\cong\Delta ABC.$$

2. 再來說明圖一的四邊形$CFHG$為正方形，且求出面積：

因為$\angle ACB=\angle BGD=\angle DHE=\angle EFA=90^\circ$，且每邊長皆為$a+b$，所以四邊形$CFHG$為正方形，而面積為

$$\begin{aligned}\square CFHG &= \Delta ABC + \Delta EAF + \Delta DEH + \Delta DGB + \square ABDE \\ &= 4\times \Delta ABC + \square ABDE \\ &= 4\times \frac{ab}{2} + c^2 \\ &= 2ab + c^2.\end{aligned}$$

3. 說明圖二的四邊形 $CDIF$ 與四邊形 $ACBH$ 為矩形：

   圖二中，因為 $\overline{CD}//\overline{FI}$, $\overline{CF}//\overline{DI}$ 又 $\angle CDI = 90°$，所以四邊形 $CDIF$ 為矩形，同理，四邊形 $ACBH$ 也為矩形。

4. 說明圖二的四邊形 $EHGI$ 為正方形，且求出面積：

   圖二中，因為 $\angle AED = \angle DIF = \angle FGB = \angle BHA = 90°$，且每邊長皆為 $a+b$，所以四邊形 $EHGI$ 為正方形，而面積為

$$\begin{aligned}\square EHGI &= \square ACDE + \square BCFG + \square CDIF + \square ACBH \\ &= b^2 + a^2 + ab + ab \\ &= 4\times \frac{ab}{2} + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab.\end{aligned}$$

5. 最後利用圖一與圖二的正方形面積相同，整理推出勾股定理的相關式：

   因為圖一中的正方形 $CFHG$ 與圖二中的正方形 $EHGI$ 皆為邊長為 $a+b$ 的正方形，所以面積相同，即

$$\begin{aligned}\square CFHG &= \square EHGI \\ 2ab + c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ c^2 &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊及書籍：

Rev. A. D. Wheeler (1859). Note on the Proposition of Pythagoras, *Mathematical Monthly*, 1, 159.

Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*, Leipzig & Berlin : Teubner.

E. Fourrey (1907), *Curiosités Géométriques* (p. 80). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：

此證明 R. B. Nelsen 認為是以《周髀算經》的基礎上所呈現的，利用兩種不同的作圖方式，作出相同的正方形，並利用拆解的方式，將相同的正方形用兩個不同等式表示，比較後即可推出勾股定理，兩種作圖的面積都不難計算，但可以只用〈圖一〉就推出勾股定理，詳細證明過程在下方補充。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：

將圖一的正方形 $ABDE$ 看成大正方形 $CFHG$ 扣掉四個三角形 ABC ，將等式整理，推出勾股定理的相關式：

$$\square ABDE = \square CFHG - 4 \times \Delta ABC$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \times \frac{ab}{2}$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Maurice Laisnez 想出來的，當時他僅是位高中生，他說：「如果你一開始將正方形用直角三角形包圍形成另一個大的正方形，那麼還是會得到 a 的平方加 b 的平方，看我作吧！」