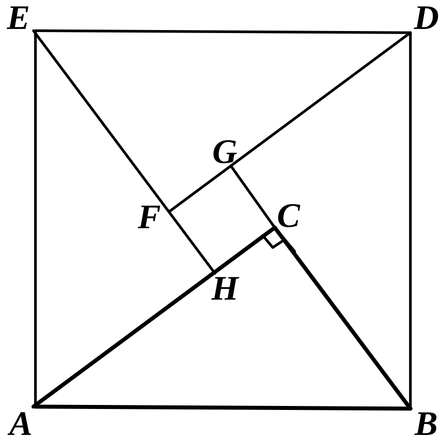
勾股定理證明-A034

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$ABDE$。

2. 在正方形$ABDE$裡取一點F，使得$\overline{DF}=\overline{AC}$且$\overline{EF}=\overline{BC}$。

3. 將$\overline{BC}$延長，交$\overline{DF}$於G點，將$\overline{EF}$延長，交$\overline{AC}$於H點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中所有的三角形皆全等，最後將正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形DEF、三角形EAH、三角形BDG皆全等：

因為$\overline{DF}=\overline{AC}$, $\overline{EF}=\overline{BC}$又 $\overline{AB}=\overline{DE}$，所以可推得

$$\Delta DEF \cong \Delta ABC \text{ (SSS 全等).}$$

又因為$\angle EAH = 90° - \angle BAC = \angle ABC$, $\angle AEH = 90° - \angle DEF = \angle EDF = \angle BAC$，且$\overline{EA}=\overline{AB}$，所以可推得

$$\Delta EAH \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等).}$$

同理，可推得$\Delta BDG \cong \Delta ABC$，由此可知：

$$\Delta EAH \cong \Delta BDG \cong \Delta DEF \cong \Delta ABC.$$

2. 說明四邊形 $CGFH$ 為正方形：

因為四邊形 $CGFH$ 四個角的外角皆為直角，所以四邊形 $CGFH$ 四個角的皆為直角，且每邊長皆為 $b-a$，推得

四邊形 $CGFH$ 為正方形。

3. 最後正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式

將正方形 $ABDE$ 拆解成三角形 AEH、三角形 BDG、三角形 DEF、三角形 ABC、正方形 $CGFH$，即

$$\square ABDE = \Delta AEH + \Delta BDG + \Delta DEF + \Delta ABC + \square CGFH$$
$$c^2 = 4\times \Delta ABC + \left(\overline{AC} - \overline{AH}\right)^2$$
$$c^2 = 4\times \frac{1}{2}ab + \left(b-a\right)^2$$
$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

這個證明最早是 12 世紀的印度數學家婆什迦羅(Bhāskara)用此方法證明過勾股定理，除此之外還收錄於以下書籍：

Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.

以及根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard A. Bell 在 1931 年 12 月 28 日所提供的。

2. 心得：

此證明與 A033 非常類似，也算是「勾股圓方圖」的類似圖，皆是利用求正方形 $ABDE$ 面積的過程中推出勾股定理，只是一個是向下作圖，一個則是向上作圖，可以互相比較閱讀，而正方形 $ABDE$ 可以直接利用邊長來算，或利用拆解的方式來求，雖然拆解後圖形較多，但作圖時有設計過，三角形皆與原本的三角形 ABC 相同，所以很容易計算，很早之前就有數學家用此方法證明，算是相當經典的證明方法之一。

3. 評量：

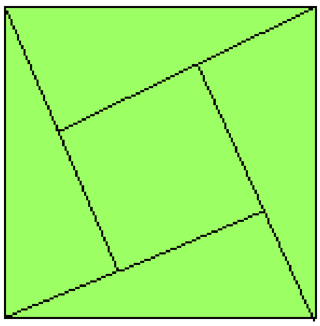
國中	高中	教學	欣賞	美學

●		●	●	●

4. 補充：簡述婆什迦羅證明勾股定理的故事：

此證明原著為十二世紀印度數學家婆什迦羅(Bhāskara, 1114－1185)，也稱為婆什迦羅第二(Bhāskara II)和 Bhāskara Achārya (翻譯為：教師婆什迦羅)，在很多方面，婆什迦羅代表了十二世紀數學知識的巔峰。

此證明原貌僅有一張圖及一個字「瞧!(Behold!)」(如下圖)，即完成證明，並未作其他說明，此證明原貌可謂是勾股定理數百個證明中最短的一個，但原貌對閱讀者來說是相當難理解圖中的意義，後人再為其圖形作註解，作出如上述證明過程第 2 點的圖形，便有助於重建婆什迦羅的證明。此證明也可與中國趙爽的「勾股圓方圖注」作比較，兩者基本構想相同，兩者圖形差異不大，但趙爽是證明 $a^2+b^2=c^2$，而婆什迦羅則反其道而行，證明 $c^2=a^2+b^2$ 。



Behold !