勾股定理證明-A033

【作輔助圖】

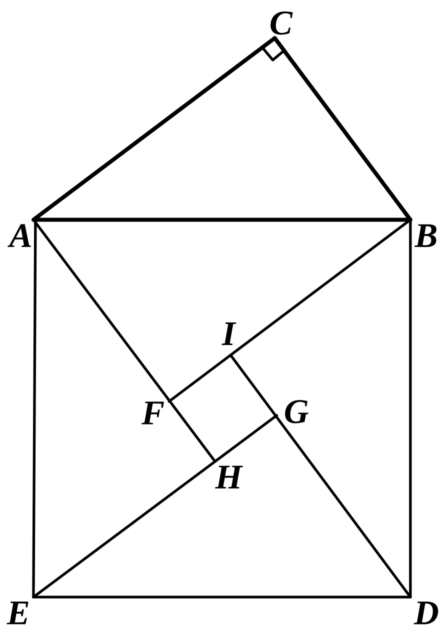
1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE$ 。

2. 從 B 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，且在平行線上取一點 F ，使得 $\overline{BF}=\overline{AC}$ 。

3. 從 E 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，且在平行線上取一點 G ，使得 $\overline{EG}=\overline{AC}$ 。

4. 連接 $\overline{AF}$ ，並將 $\overrightarrow{AF}$ 延長，交 $\overline{EG}$ 於 H 點。

5. 連接 $\overline{DG}$ ，並將 $\overrightarrow{DG}$ 延長，交 $\overline{BF}$ 於 I 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中部分的三角形皆全等，最後將正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 BAF 全等：

因為 $\overline{AC}\,//\,\overline{BF}$ ，可推得 $\angle BAC=\angle ABF$ 又 $\overline{BF}=\overline{AC}$, $\overline{AB}=\overline{AB}$ ，所以

$$\Delta BAF\cong\Delta ABC\,(\text{ SAS 全等}).$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 EDG 全等：

因為 $\overline{AC}=\overline{EG}$, $\overline{AB}=\overline{ED}$ 且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= \angle CAE - 90^\circ \\ &= \left(180^\circ - \angle AEG\right) - 90^\circ \\ &= 90^\circ - \angle AEG \\ &= \angle DEG,\end{aligned}$$

所以可推得

$$\Delta EDG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

3. 證明三角形 ABC 與三角形 AEH 、三角形 DBI 皆全等：

因為 $\angle EAH = 90^\circ - \angle BAF = \angle ABF = \angle BAC$, $\angle AEH = 90^\circ - \angle DEH = \angle EDG = \angle ABC$

又 $\overline{AE}=\overline{AB}$ ，所以可推得 $\Delta AEH \cong \Delta ABC$ (ASA 全等)，同理，可推得 $\Delta DBI \cong \Delta ABC$ ，

並由第 1 點及第 2 點可知：

$$\Delta BAF \cong \Delta EDG \cong \Delta AEH \cong \Delta DBI \cong \Delta ABC.$$

4. 說明四邊形 $FHGI$ 為正方形：

因為四邊形 $FHGI$ 四個角的外角皆為直角，所以四邊形 $FHGI$ 四個角的皆為直角，且每邊長皆為 $b-a$ ，推得

四邊形 $FHGI$ 為正方形。

5. 最後正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

將正方形 $ABDE$ 拆解成三角形 AEH 、三角形 ABF 、三角形 BDI 、三角形 DEG 、正方形 $FHGI$ ，即

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AEH + \Delta ABF + \Delta BDI + \Delta DEH + \square FHGI \\ c^2 &= 4\times\Delta ABC + \left(\overline{BF}-\overline{BI}\right)^2 \\ c^2 &= 4\times\frac{1}{2}ab + \left(b-a\right)^2 \\ c^2 &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   David W. Hoyt (1859). Propositions relating to the right-angled triangle, *Mathematical Monthly*, 1, 231 361-362.

   Charles Hutton (1812). *Tracts on Mathematical and Philosophical Subjects*, *3*. London: F. C. and J. Rivington.

2. 心得：

   此證明與趙爽有名的「勾股圓方圖」非常類似，A036 將會介紹「勾股圓方圖」的證明，而此證明是利用求正方形 *ABDE* 面積的過程中推出勾股定理，可以直接利用邊長來算，或利用拆解的方式來求面積，雖然拆解後的圖形較多，但作圖時有設計過，三角形皆與原本的三角形 *ABC* 相同，所以很容易計算，。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		