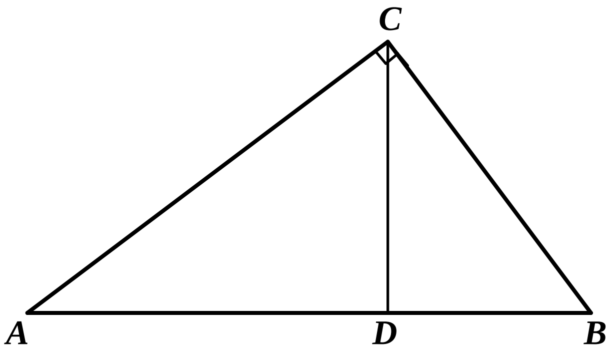
勾股定理證明-A032

【作輔助圖】

從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形ABC內作輔助線，讓裡面形成兩個直角三角形，先說明圖中的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出圖上每個邊的邊長關係，最後利用數學三一律，說明其中兩個是不符合的，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ACD、三角形CBD皆相似：

   因為$\angle ACB=\angle ADC=90°$且$\angle CAB=\angle DAC$，可推得$\Delta ABC\sim\Delta ACD$(AA 相似)，同理，可推得$\Delta ABC\sim\Delta CBD$，所以

$$\Delta ABC\sim\Delta ACD\sim\Delta CBD.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ACD與三角形CBD相似可知：$\overline{CD}:\overline{BD}=\overline{AD}:\overline{CD}$，整理得

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}.$$

3. 最後利用數學三一律，說明其中兩個皆會矛盾，來推出勾股定理的關係式：

   在直角三角形ABC中，假設$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2>\overline{AB}^2$，則在直角三角形$ACD$及直角三角形$BCD$同理可假設：

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 > \overline{AC}^2,$$
$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 > \overline{BC}^2.$$

將上述兩式相加得

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\times\overline{CD}^2 > \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$
$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\times\overline{CD}^2 > \overline{AB}^2$$
$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\times\overline{AD}\times\overline{BD} > \overline{AB}^2$$
$$\left(\overline{AD} + \overline{BD}\right)^2 > \overline{AB}^2$$
$$\overline{AB}^2 > \overline{AB}^2,$$

推得矛盾。

同理，因為假設 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 < \overline{AB}^2$ ，也會推得矛盾，所以由數學三一律可知：

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 60). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明與 A016 相同，皆是利用數學的三一律來證明勾股定理，而中間過程所需的等式，則是利用三角形相似的性質所推出，雖然利用三一律來證明學生較不熟悉，但自己閱讀不難理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	