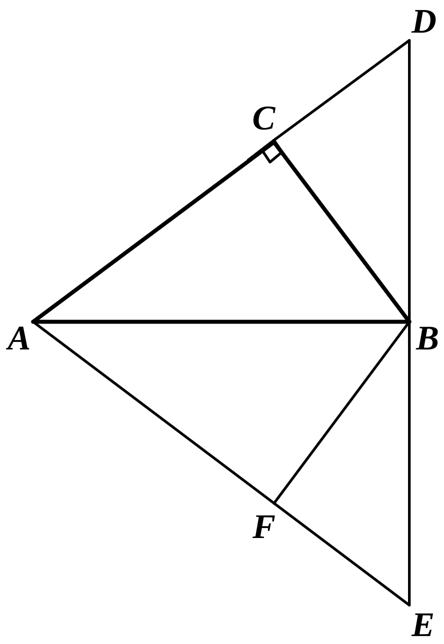
勾股定理證明-A031

【作輔助圖】

1. 延長$\overrightarrow{AC}$，且從B點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overrightarrow{AC}$於D點。

2. 將三角形ABD以$\overline{AB}$為對稱軸作出三角形ABE，且F點為C點的對稱點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形相似或全等，並推出邊長的關係式，最後將大三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ADB、三角形BDC皆相似：

   因為$\angle ACB = \angle ABD = 90°$且$\angle CAB = \angle BAD$，可推得$\Delta ABC \sim \Delta ADB$(AA 相似)，同理，可推得$\Delta ADB \sim \Delta BDC$，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ABC與三角形ADB相似可知：$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{BD}$，整理得

$$\overline{BD}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 BDC 相似可知：$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$，整理得

$$\overline{CD}=\frac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}.$$

4. 最後三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

   將三角形 ADE 拆解成三角形 ABD、三角形 ABE，即

$$\begin{aligned}
\Delta ADE &= \Delta ABD+\Delta ABE\\
\Delta ADE &= 2\times\Delta ABD\\
\Delta ADE &= 2\times\left(\Delta ABC+\Delta BCD\right)\\
\frac{1}{2}\overline{DE}\times\overline{AB} &= 2\times\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CD}\times\overline{BC}\right)\\
\frac{1}{2}\times 2\overline{BD}\times\overline{AB} &= \overline{AC}\times\overline{BC}+\overline{CD}\times\overline{BC}\\
\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}\times\overline{AB} &= \overline{AC}\times\overline{BC}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}\times\overline{BC}\\
\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}} &= \overline{AC}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}\\
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2+\overline{BC}^2,
\end{aligned}$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 87). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明的圖與 A002 類似，只是再將三角形 ADE 對稱，但此證明不像 A002 是直接利用三角形相似的性質，來找出一些等式並直接推出勾股定理，而是

利用三角形 *ADE* 拆解來推論，而拆解後的各個小三角形，則是再用三角形相似的性質來算，而此證明其實可以直接用三角形 *ADE* 來推論，對稱後只是多一倍而已。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				