勾股定理證明-A030

【作輔助圖】

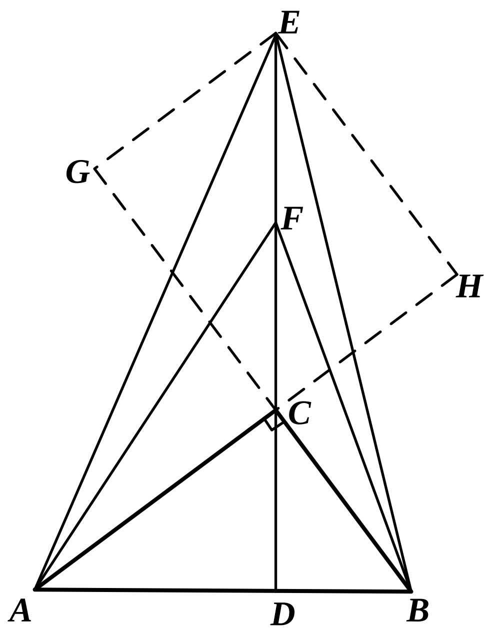
1. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點。

2. 延長$\overrightarrow{DC}$，並在$\overrightarrow{DC}$上取$\overline{CE}=\overline{AB}$。

3. 在$\overline{CE}$上取一點F，使得$\overline{DF}=\overline{AB}$。

4. 從E點作$\overleftrightarrow{BC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{BC}$於F點。

5. 從E點作$\overleftrightarrow{AC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{AC}$於G點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等，並推出邊長的關係式，最後將圖中的三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形CEG、三角形ECH皆全等，並推出三個三角形的邊長關係：

   因為$\overline{CE}=\overline{AB}$, $\angle CGE=\angle ACB=90°$且

$$\begin{aligned}\angle ECG &= \angle BCD \\ &= 180^\circ - \left(\angle BDC + \angle CBD\right) \\ &= 90^\circ - \angle CBD \\ &= \angle BAC,\end{aligned}$$

所以可推得

$$\Delta CEG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

同理，可推得

$$\Delta CEG \cong \Delta ECH \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

由此可知：

$$\begin{aligned}&\overline{CE} = \overline{AB}, \\ &\overline{EG} = \overline{CH} = \overline{BC}, \\ &\overline{CG} = \overline{EH} = \overline{AC}.\end{aligned}$$

2. 利用第 1 點的邊長關係，推出其他的邊長關係：

因為 $\overline{CE} = \overline{DF}$ ，又 $\overline{CE} = \overline{CF} + \overline{EF}$， $\overline{DF} = \overline{CD} + \overline{CF}$ 所以

$$\overline{EF} = \overline{CD}.$$

3. 凹四邊形利用拆解的方式來算面積，來推出與其他三角形面積關係：

將凹四邊形 $AEBF$ 拆成三角形 AEF 與三角形 BEF ，即

$$\begin{aligned}AEBF &= \Delta AEF + \Delta BEF \\ &= \frac{1}{2}\overline{EF} \times \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{EF} \times \overline{BD} \\ &= \frac{1}{2}\overline{EF} \times \left(\overline{AD} + \overline{BD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{AB} \\ &= \Delta ABC.\end{aligned}$$

4. 最後三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

將三角形 ABF 拆解成凹四邊形 $ACBF$ 與三角形 ABC ，即

$$\Delta ABF = ACBF + \Delta ABC$$
$$\Delta ABF = ACBF + AEBF$$
$$\Delta ABF = ACBE$$
$$\Delta ABF = \Delta ACE + \Delta BCE$$
$$\frac{1}{2}\overline{DF}\times\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{EH} + \frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{EG}$$
$$\overline{AB}\times\overline{AB} = \overline{AC}\times\overline{AC} + \overline{BC}\times\overline{BC},$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 80). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：
   此證明與 A028, A029 非常類似，利用求三角形 *ABF* 面積的過程中推出勾股定理，拆成其他圖形，除了有些三角形的高需要作輔助圖才知道長度較不好找，其他都容易計算，此證明很像幾何方式的證明，但有整理等式的動作，所以還是被歸類在代數的證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	