勾股定理證明-A029

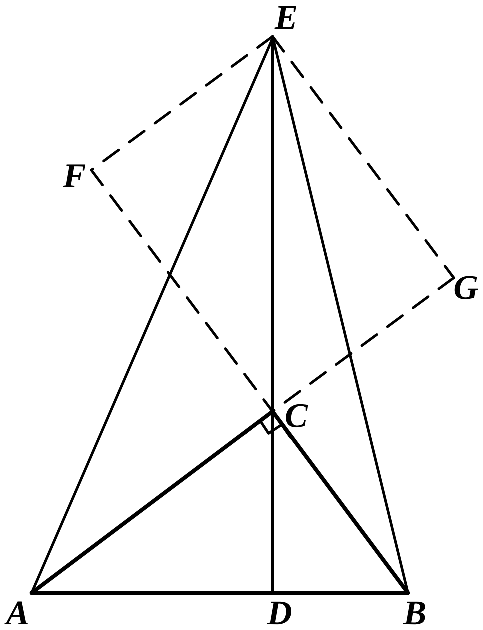
【作輔助圖】

1. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點。

2. 延長$\overrightarrow{DC}$，並在$\overrightarrow{DC}$上取$\overline{CE}=\overline{AB}$。

3. 從E點作$\overleftrightarrow{BC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{BC}$於F點。

4. 從E點作$\overleftrightarrow{AC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{AC}$於G點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等，並推出邊長的關係式，最後將圖中的凹四邊形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形CEF、三角形ECG皆全等，並推出三個三角形的邊長關係：

   因為$\overline{CE}=\overline{AB}$, $\angle CFE=\angle ACB=90^\circ$且

$$
\begin{aligned}
\angle ECF &= \angle BCD \\
&= 180^\circ - (\angle BDC + \angle CBD) \\
&= 90^\circ - \angle CBD \\
&= \angle BAC,
\end{aligned}
$$

所以可推得

$$\Delta CEF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

同理，可推得

$$\Delta CEF \cong \Delta ECG \cong \Delta ABC.$$

由此可知：

$$
\begin{aligned}
&\overline{CE} = \overline{AB}, \\
&\overline{EF} = \overline{CG} = \overline{BC}, \\
&\overline{CF} = \overline{EG} = \overline{AC}.
\end{aligned}
$$

2. 最後凹邊形 $ACBE$ 利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

   三角形 ACE 與三角形 BCE 用不同的底和高來算面積，分別為

$$
\begin{aligned}
\Delta ACE &= \frac{1}{2}\overline{CE} \times \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{EG}, \\
\Delta BCE &= \frac{1}{2}\overline{CE} \times \overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{EF}.
\end{aligned}
$$

   將凹四邊形 $ACBE$ 拆成三角形 ACE 、三角形 BCE 的和，即把上面兩式相加：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{CE} \times \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CE} \times \overline{BD} &= \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{EF} + \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{EG} \\
\overline{CE} \times \left(\overline{AD} + \overline{BD}\right) &= \overline{BC} \times \overline{EF} + \overline{AC} \times \overline{EG} \\
\overline{AB} \times \overline{AB} &= \overline{BC} \times \overline{BC} + \overline{AC} \times \overline{AC} \\
\overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,
\end{aligned}
$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 79). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明與 A028 非常類似，皆是利用求凹四邊形面積的過程中推出勾股定理，拆成兩個三角形，用不同的底對應到不同的高來算，但有些高需要作輔助圖才知道長度，此證明很像幾何方式的證明，但有整理等式的動作，所以還是被歸類在代數的證明。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	