勾股定理證明-A028

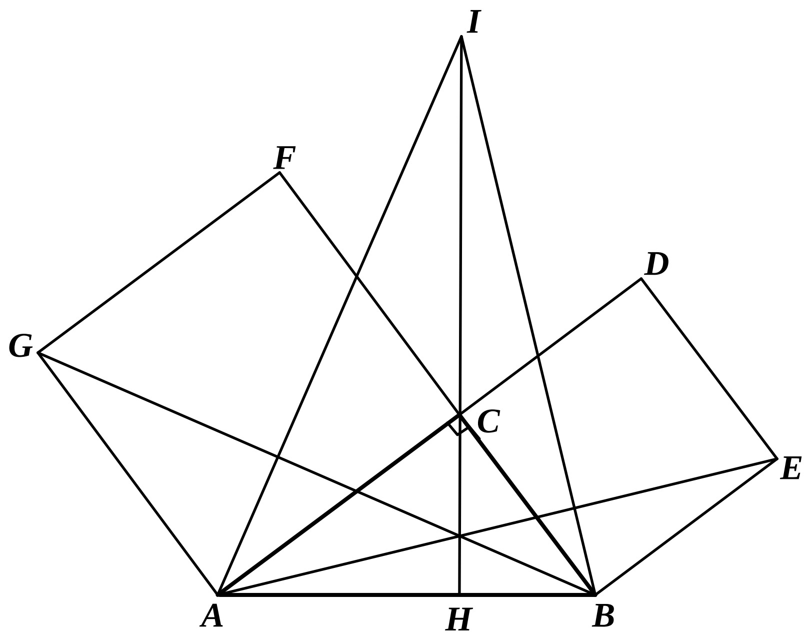
【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$及$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$BCDE$、正方形$ACFG$。

2. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於H點。

3. 延長$\overrightarrow{HC}$，並在$\overrightarrow{HC}$上取$\overline{CI}=\overline{AB}$。

4. 連接$\overline{AE}$, $\overline{BG}$, $\overline{AI}$, $\overline{BI}$。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的三角形與正方形，先說明圖中部分的三角形全等，最後利用圖中的凹四邊形用兩種不同拆解方法算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形BCI與三角形EBA全等；三角形ACI與三角形GAB全等：

   因為$\overline{CI}=\overline{AB}$, $\overline{BC}=\overline{BE}$且

$$\begin{aligned}\angle BCI &= 180^\circ - \angle BCH \\ &= \angle BHC + \angle CBH \\ &= 90^\circ + \angle CBH \\ &= \angle EBA,\end{aligned}$$

所以可推得

$$\Delta BCI \cong \Delta EBA(\text{ SAS 全等}),$$

同理，可推得

$$\Delta ACI \cong \Delta GAB(\text{ SAS 全等}).$$

2. 最後將凹四邊形利用兩種不同拆解的方式來算面積，來推出勾股定理的相關式：

   凹四邊形 $ACBI$ 可以拆成三角形 ACI 、三角形 BCI ，可以拆成三角形 ABE 、三角形 ABG ，即

$$\begin{aligned}\Delta ACI + \Delta BCI &= \Delta ABE + \Delta ABG \\ \frac{1}{2}\overline{CI}\times\overline{AH} + \frac{1}{2}\overline{CI}\times\overline{BH} &= \frac{1}{2}\overline{BE}\times\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{AG}\times\overline{AC} \\ \overline{CI}\times\left(\overline{AH}+\overline{BH}\right) &= \overline{BE}\times\overline{BC} + \overline{AG}\times\overline{AC} \\ \overline{AB}\times\overline{AB} &= \overline{BC}\times\overline{BC} + \overline{AC}\times\overline{AC} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍及期刊：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 79). Amsterdam: A. Versluys.

H. Renan (1889). Mathématiques : Démonstrations élémentaires du théorème de Pythagore. *Revue Scientifique*, *1*.

E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques* (p. 77, 99). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：

   此證明是利用求凹四邊形 $ACBI$ 面積的過程中推出勾股定理，拆成兩個三角形，用兩種不同方法求三角形面積，不論是哪種方式都算很好推論，此證明很像幾何方式的證明,但有整理等式的動作,所以還是被歸類在代數的證明。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●