勾股定理證明-A027

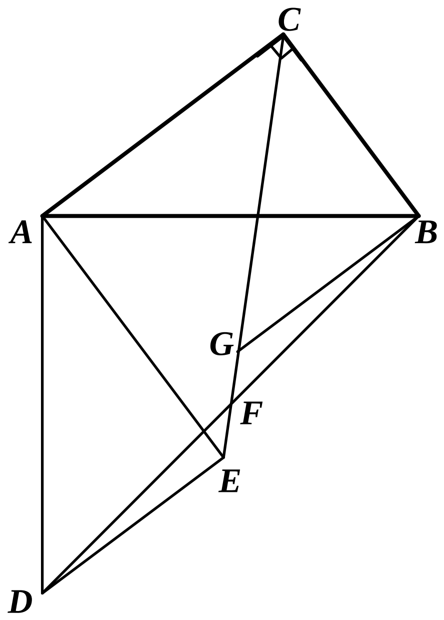
【作輔助圖】

1. 從A點作$\overline{AB}$的垂線，並在垂線上取$\overline{AD}=\overline{AB}$。

2. 從D點作$\overline{AC}$的平行線，並在平行線上取$\overline{DE}=\overline{BC}$。

3. 連接$\overline{AE}$，$\overline{CE}$，$\overline{BD}$，而$\overline{BD}$交$\overline{CE}$於F點。

4. 從B點作$\overline{AC}$的平行線，交$\overline{CE}$於G點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，推出三角形的邊長關係，最後將四邊形用兩種不同拆解方法算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ADE全等，並推出兩三角形的邊長關係：

   因為$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DE}$且

$$
\begin{aligned}
\angle ADE &= 180^\circ - \angle DAC \\
&= 180^\circ - \left(\angle DAB + \angle BAC\right) \\
&= 180^\circ - \left(90^\circ + \angle BAC\right) \\
&= 90^\circ - \angle BAC \\
&= \angle ABC.
\end{aligned}
$$

所以可推得

$$\Delta ABC \cong \Delta ADE \text{ (SAS 全等)},$$

由此可知：

$$
\begin{aligned}
\overline{AD} &= \overline{AB}, \\
\overline{DE} &= \overline{BC}, \\
\overline{AE} &= \overline{AC}.
\end{aligned}
$$

2. 利用第 1 點的三角形全等性質，推出三角形 ACE 與三角形 BCG 為等腰直角三角形：

因為

$$
\begin{aligned}
\angle EAC &= \angle EAB + \angle BAC \\
&= \angle EAB + \angle DAE \\
&= \angle DAB \\
&= 90^\circ,
\end{aligned}
$$

且 $\overline{AE} = \overline{AC}$ ，所以可推得三角形 ACE 為等腰直角三角形，即

$$\angle ACE = 45^\circ.$$

又因為 $\angle GBC = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$ ，且 $\angle BCG = \angle BCA - \angle ACG = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，所以可推得三角形 BCG 為等腰直角三角形，即

$$\overline{BG} = \overline{BC}.$$

3. 最後將四邊形利用兩種不同拆解的方式來算面積，來推出勾股定理的相關式：

四邊形 $ADBC$ 可以拆成三角形 ABC 、三角形 ABD ，又可以拆成三角形 BCG 、三角形 ACE 、三角形 ADE 、三角形 BFG 相加，再扣掉三角形 DEF ，即

$$\Delta ABC + \Delta ABD = \Delta BCG + \Delta ACE + \Delta ADE + \Delta BFG - \Delta DEF$$

$$\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BG}+\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AE}+\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{DE}$$

$$\overline{BC}\times\overline{AC}+\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC}+\overline{BC}\times\overline{AC}$$

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 78). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明是利用求四邊形 $ADBC$ 面積的過程中推出勾股定理，利用兩種不同拆解方法來求面積，而拆解後的各個小三角形的面積，則是利用三角形相似的性質來找出邊長關係求得，雖然拆解出來的圖形較多，但只要能找到底對應的高，每個三角形面積都不難算。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	