勾股定理證明-A026

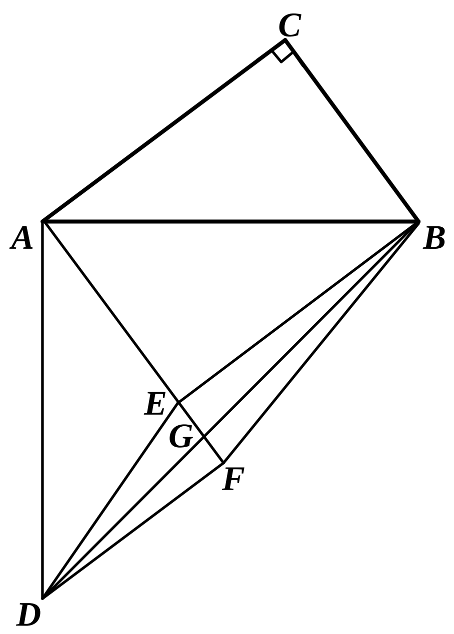
【作輔助圖】

1. 從 A 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，並在垂線上取 $\overline{AD}=\overline{AB}$ 。

2. 從 B 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，並在平行線上取 $\overline{BE}=\overline{AC}$ 。

3. 從 D 點作 $\overline{AC}$ 的平行線，並在平行線上取 $\overline{DF}=\overline{BC}$ 。

4. 連接 $\overline{BD}$， $\overline{AF}$， $\overline{DE}$ ，而 $\overline{BD}$ 交 $\overline{AF}$ 於 G 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等或相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將三角形拆解來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 BAE 、三角形 ADF 全等，並推出三個三角形的邊長關係：

   因為 $\overline{AC}=\overline{BE}$， $\angle BAC=\angle ABE$ 且 $\overline{AB}=\overline{AB}$ ，所以可推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAE \text{ (SAS 全等)},$$

又因為 $\overline{AD}=\overline{AB}$， $\overline{DF}=\overline{BC}$ 且

$$\begin{aligned}\angle AFD &= \angle CAF \\ &= \angle CAB+\angle FAB \\ &= \angle CAB+\angle ABC \\ &= 90^\circ \\ &= \angle ACB,\end{aligned}$$

所以可推得

$$\Delta ABC \cong \Delta ADF \text{ (RHS 全等)},$$

由此可知：

$$\begin{aligned}&\overline{AD}=\overline{AB}, \\ &\overline{DF}=\overline{AE}=\overline{BC}, \\ &\overline{AF}=\overline{BE}=\overline{AC}.\end{aligned}$$

2. 再證明三角形 BEG 與三角形 DFG 相似，並推出兩三角形的邊長關係：

因為 $\angle BEG=\angle DFG=90^\circ$ 且 $\angle BGE=\angle DGF$ ，可推得

$$\Delta BEG \sim \Delta DFG \text{ (AA 相似)},$$

由此可知： $\overline{BE}:\overline{DF}=\overline{EG}:\overline{FG}$ ，整理得

$$\overline{BE}\times\overline{FG}=\overline{DF}\times\overline{EG}.$$

3. 最後三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的關係式：

將三角形 ABD 拆解成三角形 ADG 、三角形 ABG ，整理得

$$\begin{aligned}\Delta ABD &= \Delta ADG+\Delta ABG \\ \Delta ABD &= \Delta ADE+\Delta DEG+\Delta ABG \\ \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD} &= \frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{DF}+\frac{1}{2}\overline{EG}\times\overline{DF}+\frac{1}{2}\overline{AG}\times\overline{BE} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AE}\times\overline{DF}+\overline{BE}\times\overline{FG}+\overline{AG}\times\overline{BE} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{BE}\times\left(\overline{FG}+\overline{AG}\right) \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2+\overline{AC}\times\overline{AF} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2+\overline{AC}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 77). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：
   此證明與 A025 非常相似，皆是利用求三角形 ABD 面積的過程中推出勾股定理，可以直接利用底和高來算，或利用拆解的方式來求，而拆解後的各個小三角形的面積則是利用三角形相似的性質來找出邊長關係求得，但圖中的相似三角形較不容易發現。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	