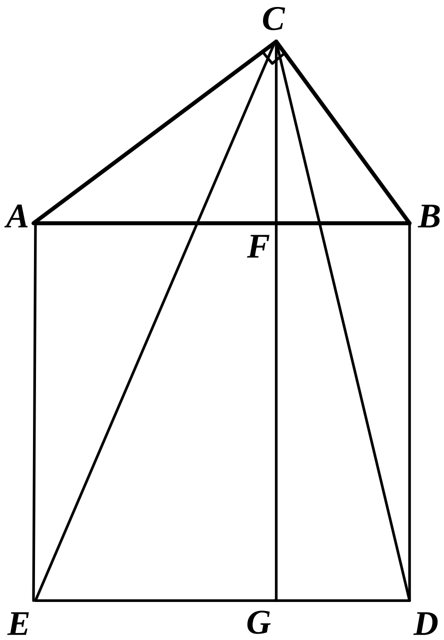
勾股定理證明-A024

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABDE$ 。

2. 從 C 點作 $\overline{DE}$ 的垂線，分別交 $\overline{AB}$ 及 $\overline{DE}$ 於 F，G 兩點。

3. 連接 $\overline{CD}$，$\overline{DE}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後利用大五邊形拆成三個三角形相加，再將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACF 、三角形 CBF 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle AFC = 90°$ 且 $\angle CAB = \angle FAC$ ，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ACF$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta CBF$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ACF \sim \Delta CBF.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 CBF 相似可知： $\overline{BC} : \overline{BF} = \overline{AB} : \overline{BC}$ ，整理得

$$\overline{BF} = \frac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   再由三角形 ABC 與三角形 ACF 相似可知： $\overline{AC}:\overline{AF} = \overline{AB}:\overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AC}\times\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}.$$

4. 最後大五邊形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

   五邊形 $ACBDE$ 可以拆成正方形 $ABDE$ 與三角形 ABC ，又可以拆成三角形 ACE 、三角形 CDE 、三角形 BCD ，即

$$\begin{aligned}
\square ABDE + \Delta ABC &= \Delta ACE + \Delta CDE + \Delta BCD \\
\overline{AB}\times\overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CF} &= \frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{DE}\times\overline{CG} + \frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{BF} \\
2\overline{AB}\times\overline{AB} + \overline{AB}\times\overline{CF} &= \overline{AB}\times\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} + \overline{AB}\times\left(\overline{CF}+\overline{FG}\right) + \overline{AB}\times\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} \\
2\overline{AB}\times\overline{AB} + \overline{AB}\times\overline{CF} &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}\times\overline{CF} + \overline{AB}\times\overline{FG} + \overline{BC}^2 \\
2\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}\times\overline{AB} + \overline{BC}^2 \\
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,
\end{aligned}$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 76). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明與 A023 的圖相同，證明方式也相當類似，此證明是利用求五角形 $ACBDE$ 面積的過程中推出勾股定理，利用兩種不同拆解方法來求面積，而拆解後的各個小三角形則是利用三角形相似的性質來找出邊長關係求其面積，雖然拆解出來的圖形較多，但每個三角形面積都不難算。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●