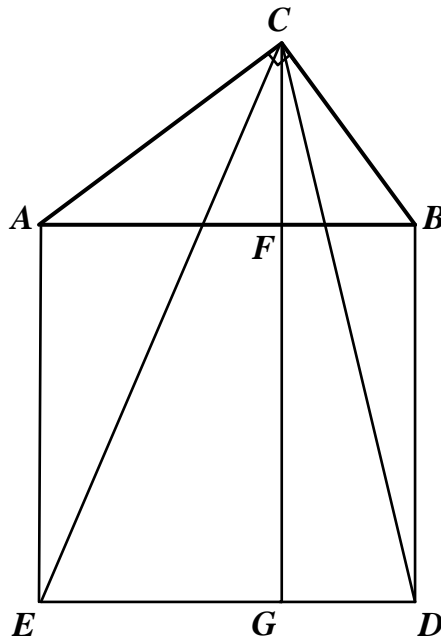


勾股定理證明-A023

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊長向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 從 C 點作 \overline{DE} 的垂線，分別交 \overline{AB} 及 \overline{DE} 於 F, G 兩點。
3. 連接 $\overline{CD}, \overline{DE}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後利用正方形拆成兩個長方形來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACF 、三角形 CBF 皆相似：

因為 $\angle ACB = \angle AFC = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle FAC$ ，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle ACF$ (AA 相似)，同理，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle CBF$ ，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle ACF \sim \triangle CBF.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 CBF 相似可知： $\overline{BC} : \overline{BF} = \overline{AB} : \overline{BC}$ ，整理得

$$\overline{BF} = \frac{\overline{BC} \times \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 ACF 相似可知： $\overline{AC} : \overline{AF} = \overline{AB} : \overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}.$$

4. 最後正方形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

將正方形 $ABDE$ 拆解成矩形 $AFGE$ 、矩形 $BDGF$ ，即：

$$\square ABDE = \square AFGE + \square BDGF$$

$$\square ABDE = 2\Delta AEC + 2\Delta BDC$$

$$\overline{AB} \times \overline{AB} = 2 \times \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{AF} + 2 \times \frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{BF}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB} \times \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} + \overline{AB} \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 76). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

此證明與 G217 的圖類似，與 A024 的圖形相同，證明方式也相當類似，此證明是利用求正方形 $ABDE$ 面積的過程中推出勾股定理，可以直接利用邊長來算，或利用拆解的方式來求，而拆解後的矩形則是利用三角形相似的性質來找出邊長關係求其面積。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●