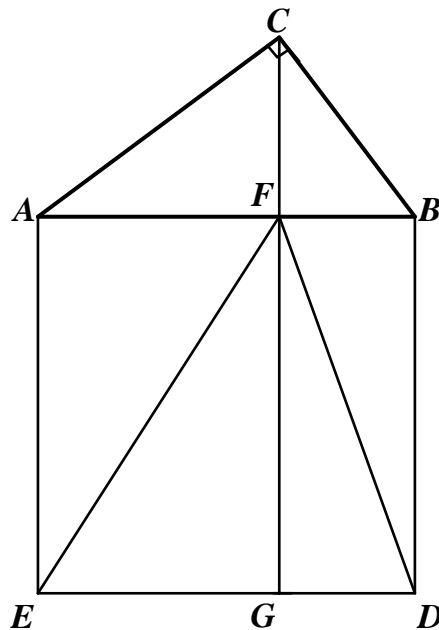


勾股定理證明-A022

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊長向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 從 C 點作 \overline{DE} 的垂線，分別交 \overline{AB} 及 \overline{DE} 於 F, G 兩點。
3. 連接 $\overline{DF}, \overline{EF}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形與正方形，先說明圖中部分的三角形相似，利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後利用三角形拆解來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACF 、三角形 CBF 皆相似：

因為 $\angle ACB = \angle AFC = 90^\circ$ 且 $\angle CAB = \angle FAC$ ，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle ACF$ (AA 相似)，同理，可推得 $\triangle ABC \sim \triangle CBF$ ，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle ACF \sim \triangle CBF.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 CBF 相似可知： $\overline{BC} : \overline{BF} = \overline{AB} : \overline{BC}$ ，整理得

$$\overline{BF} = \frac{\overline{BC} \times \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 ACF 相似可知： $\overline{AC} : \overline{AF} = \overline{AB} : \overline{AC}$ ，整理得

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}.$$

4. 再來證明三角形 AEF 與三角形 GFE 全等；三角形 BDF 與三角形 GFD 全等：

因為 $\angle EAF = \angle FGE = 90^\circ$ ， $\angle AEF = 90^\circ - \angle GEF = \angle GFE$ 且 $\overline{EF} = \overline{EF}$ ，所以

$$\triangle AEF \cong \triangle GFE \text{ (AAS 全等)},$$

同理，可推得

$$\triangle BDF \cong \triangle GFD \text{ (AAS 全等)}.$$

5. 最後三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

將三角形 DEF 拆解成三角形 GEF 、三角形 GDF ，即

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= \triangle GEF + \triangle GDF \\ \triangle DEF &= \triangle AEF + \triangle BDF \\ \frac{1}{2} \overline{DE} \times \overline{FG} &= \frac{1}{2} \overline{AF} \times \overline{AE} + \frac{1}{2} \overline{BF} \times \overline{BD} \\ \overline{AB} \times \overline{AB} &= \overline{AB} \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} + \overline{AB} \times \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2, \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 76). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

此證明與 G140 的圖非常類似，G140 作圖時多作正方形，並求出正方形面積的關係，此證明則是利用求三角形 DEF 面積的過程中推出勾股定理，可以直接利用底和高來算，或利用拆解的方式來求，而拆解後各個小三角形的面積則是利用三角形相似的性質來找出邊長關係。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●