# 勾股定理證明-A021

【作輔助圖】

1. 延長 $\overrightarrow{BC}$，且在 $\overrightarrow{BC}$ 上取一點 $D$，使得 $\overline{CD}=\overline{AC}$。

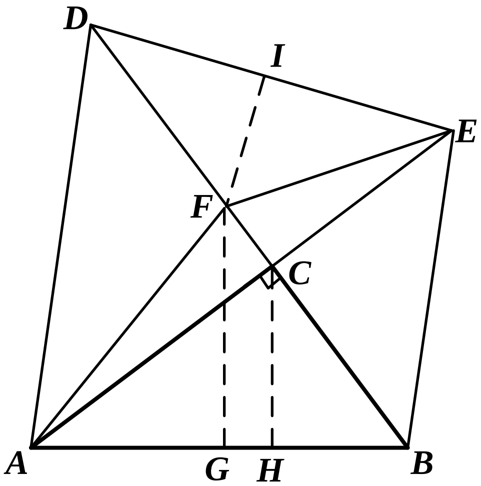
2. 在 $\overrightarrow{AC}$ 上取 $E$ 點，使得 $\overline{CE}=\overline{BC}$。

3. 在 $\overline{CD}$ 上取 $F$ 點，使得 $\overline{DF}=\overline{BC}$。

4. 連接 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{DE}$。

5. 分別從 $F$ 點和 $C$ 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 $G$, $H$ 兩點。

6. 從 $F$ 點作 $\overline{DE}$ 的垂線，交 $\overline{DE}$ 於 $I$ 點。




【求證過程】

在直角三角形 $ABC$ 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等，推出幾個三角形的邊長關係，最後利用大四邊形用兩種不同拆解方法算面積，將等式整理，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 $ABC$ 與三角形 $DEC$ 全等，並推出兩三角形的邊長關係：

因為 $\overline{DC}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=\overline{EC}$ 且 $\angle ACB=\angle DCE=90°$，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DEC \text{ (SAS 全等)},$$

推得

$$\overline{CE}=\overline{BC},$$
$$\overline{CD}=\overline{AC},$$
$$\overline{DE}=\overline{AB}.$$

2. 再證明三角形 $BFG$ 與三角形 $CAH$ 全等，並推出兩三角形的邊長關係：

因為 $\angle BGF=\angle AHC=90^\circ$，$\angle BFG=90^\circ-\angle FBG=\angle CAH$ 且

$$\begin{aligned}\overline{BF}&=\overline{BC}+\overline{CF}\\&=\overline{BC}+\overline{AC}-\overline{DF}\\&=\overline{BC}+\overline{CD}-\overline{BC}\\&=\overline{AC},\end{aligned}$$

所以

$$\Delta BFG\cong\Delta CAH\ (\text{AAS 全等}),$$

推得

$$\overline{FG}=\overline{AH}.$$

3. 證明三角形 $BCH$ 與三角形 $FDI$ 全等，並推出兩三角形的邊長關係：

因為 $\overline{BC}=\overline{DF}$，$\angle BCH=90^\circ-\angle CBH=\angle CAB=\angle FDI$ 且 $\angle BHC=\angle FID=90^\circ$，所以

$$\Delta BCH\cong\Delta FDI\ (\text{AAS 全等}),$$

推得

$$\overline{FI}=\overline{BH}.$$

4. 最後將大四邊形利用兩種不同拆解的方式來算面積，來推出勾股定理的相關式：

四邊形 $ABED$ 可以拆成三角形 $ABC$、三角形 $EBC$、三角形 $EDC$、三角形 $ADC$，又可以拆成三角形 $ABF$、三角形 $EBF$、三角形 $EDF$、三角形 $ADF$，即

$$\Delta ABC+\Delta EBC+\Delta EDC+\Delta ADC=\Delta ABF+\Delta EBF+\Delta EDF+\Delta ADF$$
$$\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{BC}\times\overline{CE}}{2}+\frac{\overline{CD}\times\overline{CE}}{2}+\frac{\overline{CD}\times\overline{AC}}{2}=\frac{\overline{AB}\times\overline{FG}}{2}+\frac{\overline{BF}\times\overline{CE}}{2}+\frac{\overline{DE}\times\overline{FI}}{2}+\frac{\overline{DF}\times\overline{AC}}{2}$$
$$\overline{AC}\times\overline{BC}+\overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}+\overline{AC}\times\overline{BC}+\overline{AB}\times\overline{BH}+\overline{AC}\times\overline{BC}$$
$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\left(\overline{AH}+\overline{BH}\right)$$
$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{AB},$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 74). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明是利用求四角形 $ABED$ 面積的過程中推出勾股定理，利用兩種不同拆解方法，拆成數個三角形來求面積，而拆解後的各個小三角形的邊長則是利用三角形相似的全等來找出，雖然拆解出來的三角形很多，但每個三角形面積都不難算，只要學生肯細心慢慢閱讀，此證明並不困難。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | | ● | |