勾股定理證明-A020

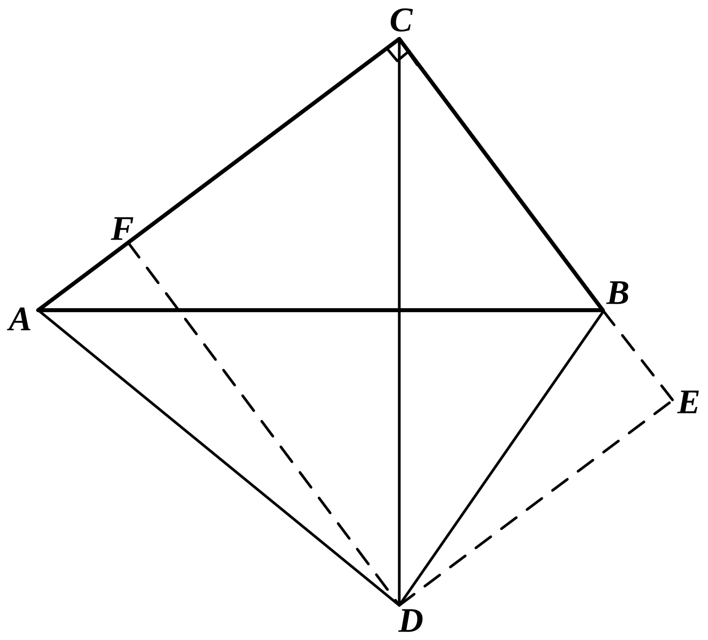
【作輔助圖】

1. 從C點作$\overline{AB}$的垂線$\overline{CD}$且取$\overline{CD}=\overline{AB}$。

2. 連接$\overline{AD}$與$\overline{BD}$。

3. 延長$\overleftrightarrow{BC}$，且從D點作$\overline{BC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{BC}$於E點。

4. 延長$\overleftrightarrow{AC}$，且從D點作$\overline{AC}$的垂線，交$\overleftrightarrow{AC}$於F點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等，最後利用四邊形用兩種不同拆解方法來算面積，將等式整理，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形CDE、三角形DCF皆全等，並推出三個三角形的邊長關係：：

因為$\angle ACB=\angle CFD=90°$，$\angle FCD=90°-\angle CAB=\angle ABC$且$\overline{CD}=\overline{AB}$，可推得$\Delta CDE\cong\Delta ABC$ (AAS 全等)，同理，可推得$\Delta DCF\cong\Delta ABC$ (AAS 全等) ，所以

$$\Delta ABC\cong\Delta CDE\cong\Delta DCF.$$

推得

$$\overline{DE}=\overline{CF}=\overline{BC},$$
$$\overline{CE}=\overline{DF}=\overline{AC},$$
$$\overline{CD}=\overline{AB}.$$

2. 最後將大四邊形利用兩種不同拆解的方式來算面積，來推出勾股定理的相關式：

   大四邊形 $ACBD$ 可以拆成三角形 ABC 、三角形 ABD ，又可以拆成三角形 ACD 、三角形 BCD ，即

$$\Delta ABC+\Delta ABD=\Delta ACD+\Delta BCD$$
$$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DF}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{AC}\times\overline{AC}+\overline{BC}\times\overline{BC}$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 75). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明是利用求四角形 $ACBD$ 面積的過程中推出勾股定理，利用兩種不同拆解方法，拆成兩個三角形來求面積，而拆解後的各個小三角形的面積則是利用三角形全等的性質來找出，每個三角形面積都不難算，學生非常容易理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	