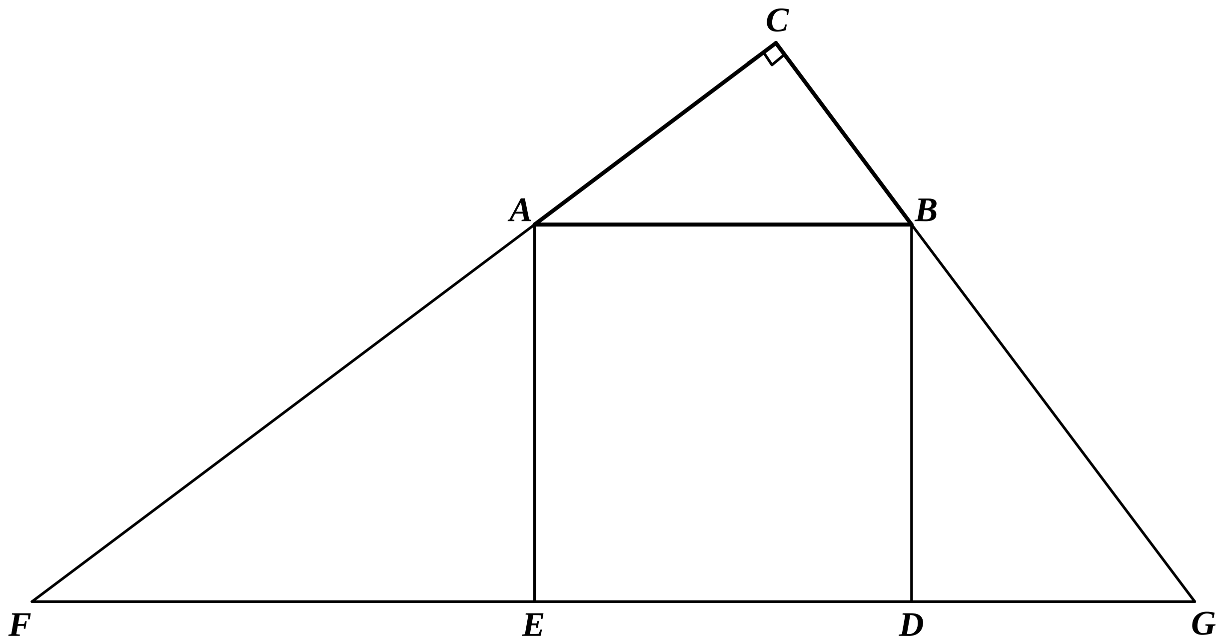
勾股定理證明-A019

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABDE$。

2. 將$\overline{AC}$與$\overline{DE}$延長，交於F點，將$\overline{BC}$與$\overline{DE}$延長，交於G點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後將大三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形FAE、三角形BGD皆相似：

   因為$\overline{AB}//\overline{FG}$，所以$\angle CAB=\angle AFE$，$\angle CBA=\angle BGD$且

   $\angle ACB=\angle AEF=\angle BDG=90^\circ$，可推得

   $$\Delta ABC \sim \Delta FAE \sim \Delta BGD \text{(AA 相似).}$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ABC與三角形FAE相似可知：$\overline{AB}:\overline{AF}=\overline{BC}:\overline{AE}$，整理得

$$\overline{AF}=\frac{\overline{AB}\times\overline{AE}}{\overline{BC}}=\frac{c^2}{a},$$

又可知：$\overline{AC}:\overline{EF}=\overline{BC}:\overline{AE}$，整理得

$$\overline{EF}=\frac{\overline{AC}\times\overline{AE}}{\overline{BC}}=\frac{bc}{a}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 BGD 相似可知：$\overline{AC}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{DG}$，整理得

$$\overline{DG}=\frac{\overline{BD}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{ca}{b},$$

又可知：$\overline{AB}:\overline{BG}=\overline{AC}:\overline{BD}$，整理得

$$\overline{BG}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{c^2}{b}.$$

4. 最後將大三角形利用拆解的方式來算面積，將等式整理，來推出勾股定理的相關式：

將三角形 CFG 拆解成三角形 ABC、三角形 AEF、三角形 BDG、正方形 $ABDE$，即

$$\Delta CFG=\Delta ABC+\Delta AEF+\Delta BDG+\square ABDE$$

$$\frac{1}{2}\overline{CF}\times\overline{CG}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{EF}+\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{DG}+\overline{AB}\times\overline{AB}$$

$$\frac{1}{2}\left(b+\frac{c^2}{a}\right)\left(a+\frac{c^2}{b}\right)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\frac{cb}{a}\times c+\frac{1}{2}\frac{ca}{b}\times c+c^2$$

$$ab+c^2+c^2+\frac{c^4}{ab}=ab+\frac{bc^2}{a}+\frac{ac^2}{b}+2c^2$$

$$\frac{c^4}{ab}=\frac{bc^2}{a}+\frac{ac^2}{b}$$

$$\frac{c^2}{ab}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b},$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 23). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

   此證明是利用求大三角形 CFG 面積的過程中推出勾股定理，可以直接利用底和高來算，或利用拆解的方式來求，而拆解後的各個小三角形的面積則是利用三角形相似的性質來找出，此證明圖沒有相當複雜，面積也不難算，所以學生非常容易理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		