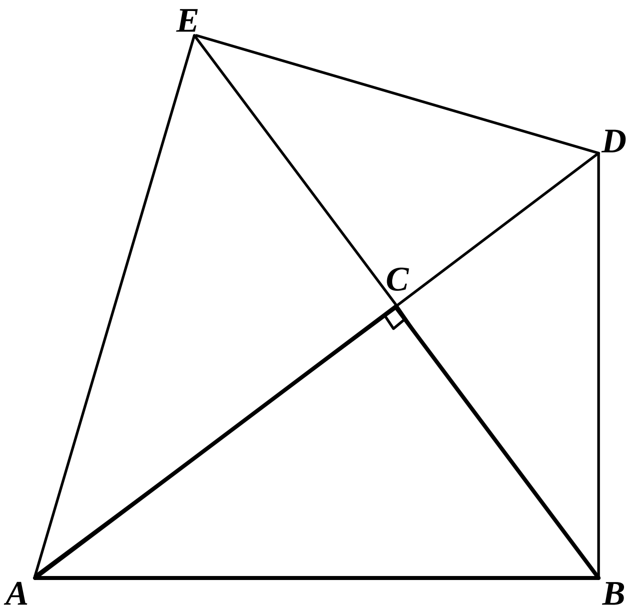
勾股定理證明-A018

【作輔助圖】

1. 延長 $\overrightarrow{AC}$，且從 B 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overrightarrow{AC}$ 於 D 點。

2. 延長 $\overrightarrow{BC}$，且在 $\overrightarrow{BC}$ 上取一點 E，作 $\overline{CE}=\overline{BC}$。

3. 連接 $\overline{AE}$, $\overline{DE}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆全等或相似，最後利用相似形的「對應邊成比例」的性質，來推出邊長的關係式，最後利用兩個全等三角形面積相等，推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 BDC 相似，並推出兩三角形的邊長關係：

   因為 $\angle ACB=\angle DCB=90°$ 且 $\angle DBC=90°-\angle ABC=\angle BAC$，所以可推得

   $$\Delta ABC \sim \Delta BDC \text{ (AA 相似)},$$

   由此可知：$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$，整理得

   $$\overline{CD}=\frac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}.$$

2. 證明三角形 ABC 與三角形 AEC 全等，並利用第 1 點的三角形相似，推出三角形 AEC 與三角形 EDC 相似：

因為 $\angle ACB = \angle ACE = 90°$ ，$\overline{CB} = \overline{CE}$ 且 $\overline{AC} = \overline{AC}$ ，所以可推得

$$\Delta ABC \cong \Delta AEC \text{ (SAS 全等)}.$$

同理，可推得 $\Delta BDC \cong \Delta EDC$ ，再由 $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ ，可推得

$$\Delta AEC \sim \Delta EDC.$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出兩三角形的邊長關係：

由三角形 AEC 與三角形 EDC 相似可知：$\overline{AE} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{CE}$ ，整理得

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AE} \times \overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

4. 最後利用第 2 點的全等關係，來推出勾股定理的相關式：

因為三角形 ABD 全等於三角形 AED ，所以兩三角形面積相等，即

$$\begin{aligned}
\Delta ABD &= \Delta AED \\
\frac{\overline{AD} \times \overline{BC}}{2} &= \frac{\overline{AE} \times \overline{DE}}{2} \\
\overline{AD} \times \overline{BC} &= \overline{AE} \times \overline{DE} \\
\left(\overline{AC} + \overline{CD}\right) \times \overline{BC} &= \overline{AE} \times \overline{DE} \qquad , \\
\left(\overline{AC} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}\right) \times \overline{BC} &= \overline{AB} \times \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{\overline{AC}} \\
\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}} \\
\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2,
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 72). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：

此證明是利用兩個全等三角形面積相等來推出勾股定理，並利用三角形相似的性質，來找出各邊的長度，其實可以不用多作三角形 AED ，可以直接利用三角形 ABD ，利用不同的底和高來推等式即可。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				