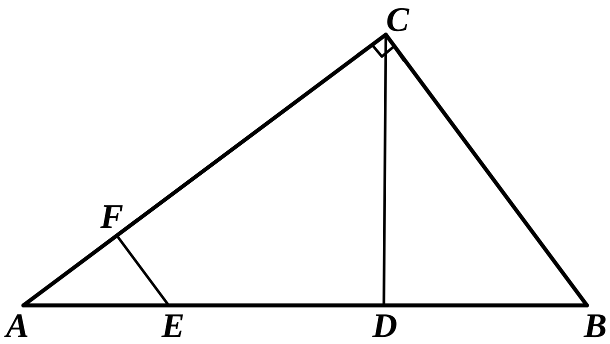
勾股定理證明-A017

【作輔助圖】

1. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於D點。

2. 在$\overline{AB}$上取一點E，使得$\overline{AE}=1$。

3. 從E點作$\overline{AC}$的垂線，交$\overline{AC}$於F點。



【求證過程】

在直角三角形ABC內作輔助線，讓裡面形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，最後利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ACD、三角形AEF、三角形CBD皆相似：

   因為$\angle ACB=\angle AFE=\angle ADC=90°$且$\angle CAB=\angle FAE=\angle DAC$，可推得$\Delta ABC\sim\Delta AEF\sim\Delta ACD$(AA 相似)，同理，可推得$\Delta ABC\sim\Delta CBD$，所以

$$\Delta ABC\sim\Delta ACD\sim\Delta AEF\sim\Delta CBD.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ACD與三角形AEF相似可知：$\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AF}$，整理得

$$\overline{AC}=\frac{\overline{AE}\times\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{1\times\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}},$$

   又可知：$\overline{CD}:\overline{EF}=\overline{AD}:\overline{AF}$，整理得

$$\overline{CD}=\frac{\overline{AD}\times\overline{EF}}{\overline{AF}}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 CBD 與三角形 AEF 相似可知：$\overline{BD}:\overline{EF}=\overline{CD}:\overline{AF}$ ，並將第 2 點的等式代入，整理得

$$\begin{aligned}\overline{BD}&=\frac{\overline{CD}\times\overline{EF}}{\overline{AF}}\\&=\frac{\overline{AD}\times\overline{EF}}{\overline{AF}}\times\frac{\overline{EF}}{\overline{AF}}\\&=\overline{AD}\times\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AF}^2}.\end{aligned}$$

4. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 AEF 相似可知：$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}$ ，並將第 2 點的等式代入整理得

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AE}\times\overline{AC}}{\overline{AF}}=\frac{1\times\overline{AC}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}^2},$$

   而 $\overline{AB}$ 又可拆成 $\overline{AD}+\overline{BD}$，並將第 3 點的等式代入上式整理得

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}^2}&=\overline{AB}\\\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}^2}&=\overline{AD}+\overline{BD}\\\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}^2}&=\overline{AD}+\overline{AD}\times\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AF}^2}\\\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}^2}&=\overline{AD}\times\left(1+\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AF}^2}\right)\\\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}^2}&=\overline{AD}\times\frac{\overline{AF}^2+\overline{EF}^2}{\overline{AF}^2}\\1&=\overline{AF}^2+\overline{EF}^2.\end{aligned}$$

5. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出兩三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 AEF 相似可知： $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}$ ，整理得

$$\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{AF},$$

又可知： $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{EF}$ ，整理得

$$\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{EF}.$$

6. 最後將第 5 點的等式平方後相加整理，並將第 4 點的等式代入，推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2+\overline{BC}^2&=\left(\overline{AB}\times\overline{AF}\right)^2+\left(\overline{AB}\times\overline{EF}\right)^2\\&=\overline{AB}^2\times\left(\overline{AF}^2+\overline{EF}^2\right)\\&=\overline{AB}^2.\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 2(2), 45.
2. 心得：
   此證明利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，由於此證明的相似三角形個數較多，所以過程較為繁瑣，學生閱讀起來較吃力，而此證明的作圖可能會有問題，如果 $\overline{AB}$ 的長度不到 1，那麼就無法找到 E 點，此證明後面有補充證明，是直接利用所知的等式，去求兩股平方和的值。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：此證明在最後有寫次要的證明方式：

由三角形 ABC 與三角形 AEF 相似可知： $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}=\overline{BC}:\overline{EF}$ ，整理得

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{AF}}$$
$$\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{AF}.$$

假設 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 為某個值的平方，即 $x^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$，並利用上面推出的等式代入整理，則

$$\begin{aligned}
x&=\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\overline{AC}^2\times\left(1+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\overline{AC}\times\left(1+\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AF}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\overline{AC}\times\left(\frac{\overline{AF}^2+\overline{EF}^2}{\overline{AF}^2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

將第 4 點所得到的等式 $\overline{AF}^2+\overline{EF}^2=1$ 代入，整理得

$$\begin{aligned}
x&=\overline{AC}\times\left(\frac{1}{\overline{AF}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}\\
&=\overline{AB}.
\end{aligned}$$

由此可知， $x=\overline{AB}$ ，即

$$c^2=a^2+b^2.$$