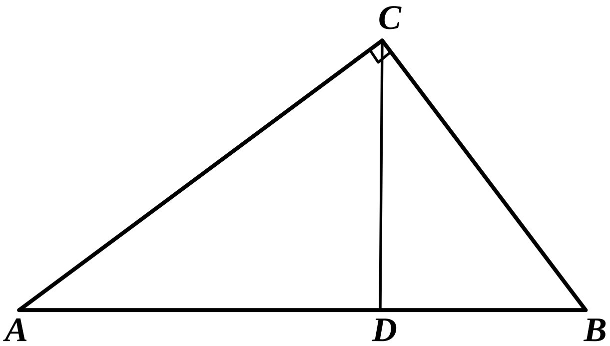
勾股定理證明-A016

【作輔助圖】

從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點，如圖所示。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，讓裡面形成兩個直角三角形，先說明圖中的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出圖上的邊長關係，最後利用數學三一律，說明其中兩個是不符合的，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACD 、三角形 CBD 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle ADC = 90°$ 且 $\angle CAB = \angle DAC$ ，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 CBD 相似可知： $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{BD}$ ，整理得

$$\overline{AC} = \frac{\overline{BC} \times \overline{CD}}{\overline{BD}},$$

   又可知： $\overline{CD} : \overline{BD} = \overline{AD} : \overline{CD}$ ，整理得

$$\overline{AD} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}}.$$

3. 最後利用數學三一律，說明其中兩個皆會矛盾，來推出勾股定理的關係式：

在直角三角形中，假設斜邊平方小於兩股平方和，即在直角三角形 ABC 中，

$\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$，在直角三角形 BCD 中，$\overline{BC}^2 < \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$，將 $\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 整理可得

$$\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\left(\overline{AD} + \overline{BD}\right)^2 < \left(\frac{\overline{BC} \times \overline{CD}}{\overline{BD}}\right)^2 + \overline{BC}^2$$

$$\left(\frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}} + \overline{BD}\right)^2 < \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{CD}^2}{\overline{BD}^2} + \overline{BC}^2$$

$$\left(\frac{\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2}{\overline{BD}}\right)^2 < \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{CD}^2}{\overline{BD}^2} + \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{BD}^2}{\overline{BD}^2}$$

$$\frac{\left(\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2\right)^2}{\overline{BD}^2} < \frac{\overline{BC}^2 \times \left(\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2\right)}{\overline{BD}^2}$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 < \overline{BC}^2.$$

推得與假設的 $\overline{BC}^2 < \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ 矛盾。

同理可證，假設在直角三角形中，假設 $\overline{AB}^2 > \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$，也會推得矛盾，所以由數學三一律可知：

在直角三角形中，斜邊平方等於兩股平方和，即在直角三角形 ABC 中，

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the

Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(6/7), 171.

2. 心得：

此證明是利用數學的三一律來證明勾股定理，而中間過程所需的等式，則是利用三角形相似的性質所推出，雖然利用三一律來證明學生較不熟悉，但自己閱讀不難理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：A016 原本有兩個證明，但第一個證明因為有錯誤，所以沒有呈現。