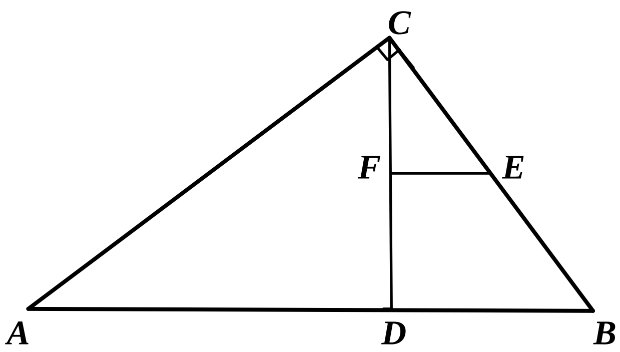
勾股定理證明-A015

【作輔助圖】

1. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。

2. 取 $\overline{BC}$ 的中點 E 。

3. 從 E 點作 $\overline{CD}$ 的垂線，交 $\overline{CD}$ 於 F 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ACD 、三角形 CEF 、三角形 CBD 皆相似：

   因為 $\angle CFE = \angle CDB = 90°$ 且 $\angle CEF = \angle CBD$ ，可推得 $\Delta CEF \sim \Delta CBD$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CEF \sim \Delta CBD.$$

2. 利用第 1 點推出的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 CEF 與三角形 CBD 相似可知： $\overline{CE} : \overline{BC} = \overline{EF} : \overline{BD}$ ，又因為 $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ，所以

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BD}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 CEF 相似可知： $\overline{BC} : \overline{EF} = \overline{AB} : \overline{CE}$ ，又 $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$,

$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BD}$，整理得

$$\overline{BC} \times \overline{CE} = \overline{AB} \times \overline{EF}$$
$$\overline{BC} \times \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AB} \times \frac{1}{2}\overline{BD}$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{BD}.$$

4. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 ACD 相似可知：$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC}$，整理得

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}.$$

5. 將第 3 點及第 4 點的等式相加整理，推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{AB} \times \overline{AD} \\ &= \overline{AB} \times \left(\overline{BD} + \overline{AD}\right) \\ &= \overline{AB} \times \overline{AB} \\ &= \overline{AB}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】
1. 來源：
根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1926 年想出來。
2. 心得：
此證明利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，此證明與 A001 比較算是較沒必要的，因為推出的等式在 A001 的輔助圖中就可以找到。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				