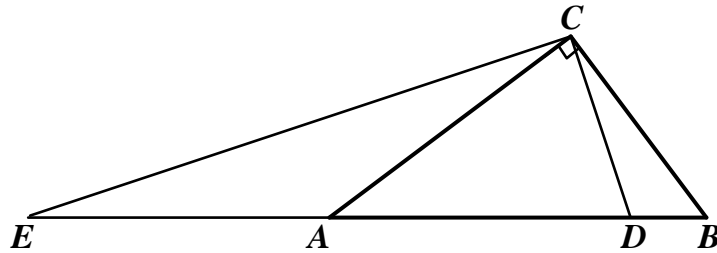


## 勾股定理證明-A014

### 【作輔助圖】

1. 在  $\overline{AB}$  上取一點  $D$ ，使得  $\overline{AD} = \overline{AC}$ ，並延長  $\overline{BA}$ ，在  $\overline{BA}$  上取一點  $E$ ，使得  $\overline{AE} = \overline{AC}$ 。
2. 連接  $\overline{CD}$ ， $\overline{CE}$ 。



### 【求證過程】

在直角三角形  $ABC$  外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先由三角形  $ACD$  與三角形  $ACE$  皆為等腰三角形推出角度關係：

因為  $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE}$ ，即三角形  $ACD$  與三角形  $ACE$  皆為等腰三角形，所以  $\angle ACD = \angle ADC$  及  $\angle ACE = \angle AEC$ ，而  $\angle CAD + \angle EAC = 180^\circ$ ，即

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle CAD + \angle EAC \\ &= (\angle ACE + \angle AEC) + (\angle ACD + \angle ADC) \\ &= 2\angle ACE + 2\angle ACD, \end{aligned}$$

推得

$$\angle ECD = \angle ACE + \angle ACD = 90^\circ.$$

2. 再證明三角形  $CDB$  與三角形  $ECB$  相似：

因為  $\angle CBD = \angle EBC$ ，又

$$\begin{aligned} \angle CDB &= \angle ECD + \angle CED \\ &= 90^\circ + \angle ECA \\ &= \angle ACB + \angle ECA \\ &= \angle ECB, \end{aligned}$$

所以可推得

$$\triangle CDB \sim \triangle ECB \text{ (AA 相似).}$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出兩三角形的邊長關係：

由三角形  $CDB$  與三角形  $ECB$  相似可知： $\overline{EB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{DB}$ ，並整理得

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{EB} \times \overline{DB} \\ \overline{BC}^2 &= (\overline{AB} + \overline{AE}) \times (\overline{AB} - \overline{AD}) \\ \overline{BC}^2 &= (\overline{AB} + \overline{AC}) \times (\overline{AB} - \overline{AC}) \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

#### 【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

Alvin Knoer (1925). Proof of the Theorem of Pythagoras, *Mathematics Teacher* 18(8), 496-497.

Versluys, J. (1914) *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 85). Amsterdam: A. Versluys.

Weber, H., & Wellstein, J. (1903). *Encyclopädie der Elementar-Mathematik* (p. 242). Leipzig: Teubner.

2. 心得：

此證明與 A082 完全相同，只是 A082 作圖時有多畫一個圓，此證明將圓刪去，而有用此方法證明過勾股定理的人相當多，是利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，而此證明要找的相似三角形較不容易發現，直接要學生看出較困難。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●