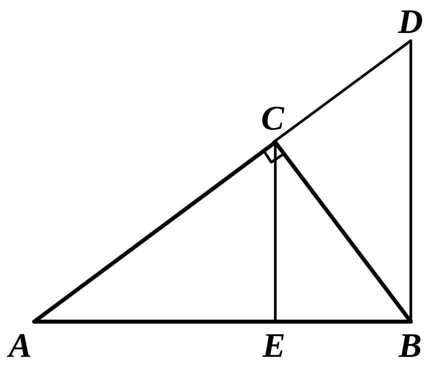
勾股定理證明-A012

【作輔助圖】

1. 延長$\overrightarrow{AC}$，且從B點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overrightarrow{AC}$於D點。

2. 從C點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於E點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ADB、三角形ACE、三角形CBE、三角形BDC皆相似：

   因為$\angle ACB=\angle ABD=90°$且$\angle BAC=\angle DAB$，可推得$\Delta ABC\sim\Delta ADB$(AA 相似)，同理，可推得$\Delta ABC\sim\Delta ACE$, $\Delta ABC\sim\Delta CBE$, $\Delta ADB\sim\Delta BDC$，所以

$$\Delta ABC\sim\Delta ADB\sim\Delta ACE\sim\Delta CBE\sim\Delta BDC.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形CBE與三角形BDC相似可知：$\overline{BC}:\overline{BD}=\overline{CE}:\overline{BC}$，整理得

$$\overline{BD}\times\overline{CE}=\overline{BC}\times\overline{BC}$$
$$\overline{BD}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{CE}}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ADB與三角形CBE相似可知：$\overline{AB}:\overline{CE}=\overline{BD}:\overline{BE}$，並將第 2 點的等式代入

整理得

$$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BD}\times\overline{CE}$$
$$\overline{AB}\times\overline{BE}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{CE}}\times\overline{CE}$$
$$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BC}^2.$$

4. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係，並將等式整理，推出勾股定理的關係式：

   由三角形 ABC 與三角形 ACE 相似可知：$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AE}$，整理得

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{AE}$$
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\left(\overline{AB}-\overline{BE}\right)$$
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{BE}.$$

   將第 3 點的等式 $\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BC}^2$ 代入上式，得

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

   根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他自己想出來的。

2. 心得：

   此證明的輔助圖是 A001 與 A002 的結合，一樣是利用三角形相似的性質，來找出一些等式關係，再將等式整理推出勾股定理，由於此證明的相似三角形個數非常多，所以並不是只有此方法，可以利用圖中其他三角形相似，一樣可以推出勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				