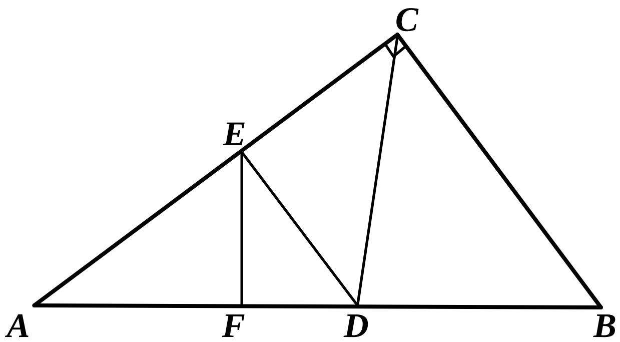
勾股定理證明-A011

【作輔助圖】

1. 作$\angle ACB$的角平分線，交$\overline{AB}$於D點。

2. 從D點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overline{AC}$於E點。

3. 從E點作$\overline{AB}$的垂線，交$\overline{AB}$於F點。



【求證過程】

在直角三角形ABC內作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形CDE為等腰直角三角形：

因為$\overline{DE}//\overline{BC}$且$\angle ACB=90^\circ$，可推得$\angle CED=90^\circ$，又$\angle ECD=45^\circ$，所以在三角形$CDE$中，$\angle EDC=45^\circ$，由此可知：三角形$CDE$為等腰直角三角形，即

$$\overline{CE}=\overline{DE}.$$

2. 再證明三角形ABC與三角形ADE、三角形AEF、三角形EDF皆相似：

因為$\angle ACB=\angle AED=90^\circ$且$\angle BAC=\angle DAE$，可推得$\Delta ABC\sim\Delta ADE$(AA 相似)，同理，可推得$\Delta ABC\sim\Delta AEF$，$\Delta AEF\sim\Delta EDF$，所以

$$\Delta ABC\sim\Delta ADE\sim\Delta AEF\sim\Delta EDF.$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形AEF與三角形EDF相似可知：$\overline{EF}:\overline{DF}=\overline{AF}:\overline{EF}$，整理得

$$\overline{DF} \times \overline{AF} = \overline{EF}^2.$$

4. 同樣利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ADE 與三角形 EDF 相似可知： $\overline{DE} : \overline{DF} = \overline{AD} : \overline{DE}$ ，整理得

$$\begin{aligned} \overline{DE}^2 &= \overline{AD} \times \overline{DF} \\ \overline{DE}^2 &= \left(\overline{AF} + \overline{DF}\right) \times \overline{DF} \\ \overline{DE}^2 &= \overline{AF} \times \overline{DF} + \overline{DF}^2. \end{aligned}$$

將第 3 點的等式 $\overline{DF} \times \overline{AF} = \overline{EF}^2$ 代入上式，得

$$\overline{DE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2.$$

5. 再利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 ABC 與三角形 EDF 相似可知： $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{DF} = \overline{AC} : \overline{EF}$ ，整理得

$$\overline{AB} \times \overline{DF} = \overline{BC} \times \overline{DE},$$

又可知： $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{EF}$ ，整理得

$$\overline{AB} \times \overline{EF} = \overline{AC} \times \overline{DE}.$$

6. 將第 6 點的兩個等式平方後相加整理，推出勾股定理的關係式。：

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 \times \overline{DF}^2 + \overline{AB}^2 \times \overline{EF}^2 &= \overline{BC}^2 \times \overline{DE}^2 + \overline{AC}^2 \times \overline{DE}^2 \\ \overline{AB}^2 \times \left(\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2\right) &= \left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) \times \overline{DE}^2, \end{aligned}$$

將第 5 點的等式 $\overline{DE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 \times \left(\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2\right) &= \left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) \times \left(\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2\right) \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2, \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(6/7), 1896, 171.

2. 心得：

   此證明利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，而在第5點中可發現，已經推論出在三角形 DEF 中有勾股定理的相關式，由於此證明的相似三角形個數非常多，所以並不是只有此方法，可以利用圖中其他三角形相似，一樣可以推出勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				