勾股定理證明-A010

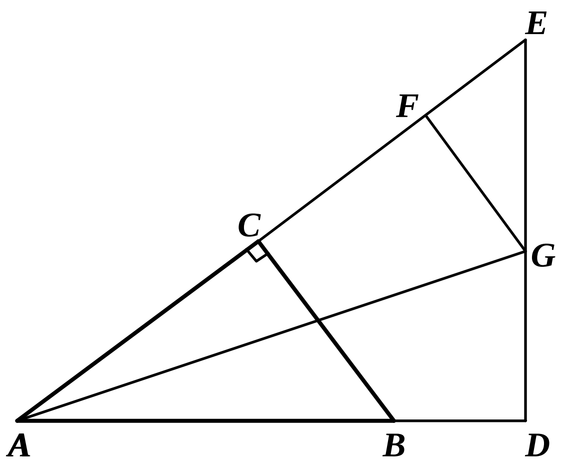
【作輔助圖】

1. 延長 $\overrightarrow{AB}$，且在 $\overrightarrow{AB}$ 上任取一點 D，並從 D 點作 $\overline{AD}$ 的垂線，交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 E 點。

2. 在 $\overline{AE}$ 上取一點 F，使得 $\overline{AF} = \overline{AD}$。

3. 從 F 點作 $\overline{AE}$ 的垂線，交 $\overline{DE}$ 於 G 點。

4. 連接 $\overline{AG}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等或相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ADG 與三角形 AFG 全等：

   因為 $\angle ADG = \angle AFG = 90°$, $\overline{AD} = \overline{AF}$ 且 $\overline{AG} = \overline{AG}$，所以

   $$\Delta ADG \cong \Delta AFG \text{ (RHS 全等)},$$

   可推得

   $$\overline{DG} = \overline{FG}.$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 AED、三角形 GEF 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle ADE = 90°$ 且 $\angle BAC = \angle EAD$，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta AED$ (AA 相似)，同

理，可推得$\Delta ABC \sim \Delta GEF$，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta AED \sim \Delta GEF.$$

3. 利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形AED與三角形GEF相似可知：$\overline{DE}:\overline{EF}=\overline{AD}:\overline{FG}$，整理得

$$\begin{aligned}\overline{DE}\times\overline{FG}&=\overline{EF}\times\overline{AD}\\ \overline{DE}\times\overline{DG}&=\overline{EF}\times\overline{AD}.\end{aligned}$$

4. 同樣利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形AED與三角形GEF相似可知：$\overline{AE}:\overline{EG}=\overline{DE}:\overline{EF}$，整理得

$$\begin{aligned}\overline{DE}\times\overline{EG}&=\overline{EF}\times\overline{AE}\\ \overline{DE}\times\left(\overline{DE}-\overline{DG}\right)&=\overline{EF}\times\left(\overline{AF}+\overline{EF}\right)\\ \overline{DE}^2-\overline{DE}\times\overline{DG}&=\overline{EF}\times\overline{AD}+\overline{EF}^2,\end{aligned}$$

   將第 3 點等式$\overline{DE}\times\overline{DG}=\overline{EF}\times\overline{AD}$代入上式，得

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2-\overline{DE}\times\overline{DG}&=\overline{DE}\times\overline{FG}+\overline{EF}^2\\ \overline{DE}^2-2\times\overline{DE}\times\overline{DG}&=\overline{EF}^2.\end{aligned}$$

5. 再利用第 2 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ABC與三角形GEF相似可知：$\overline{AB}:\overline{EG}=\overline{BC}:\overline{EF}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{EF}=\overline{BC}\times\overline{EG},$$

   又可知：$\overline{AB}:\overline{EG}=\overline{AC}:\overline{FG}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{FG}=\overline{AC}\times\overline{EG}.$$

6. 將第 5 點的兩個等式平方後相加整理，推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2 \times \overline{EF}^2 + \overline{AB}^2 \times \overline{FG}^2 = \overline{BC}^2 \times \overline{EG}^2 + \overline{AC}^2 \times \overline{EG}^2$$

$$\overline{AB}^2 \times \left(\overline{EF}^2 + \overline{DG}^2\right) = \left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) \times \overline{EG}^2$$

$$\overline{AB}^2 \times \left(\overline{EF}^2 + \overline{DG}^2\right) = \left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) \times \left(\overline{DE} - \overline{DG}\right)^2$$

$$\overline{AB}^2 \times \left(\overline{EF}^2 + \overline{DG}^2\right) = \left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) \times \left(\overline{DE}^2 - 2\overline{DE} \times \overline{DG} + \overline{DG}^2\right),$$

將第 4 點的等式 $\overline{DE}^2 - 2\overline{DE} \times \overline{DG} = \overline{EF}^2$ 代入得

$$\overline{AB}^2 \times \left(\overline{EF}^2 + \overline{DG}^2\right) = \left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) \times \left(\overline{EF}^2 + \overline{DG}^2\right)$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(6/7), 171.

2. 心得：

   此證明利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，而此證明的相似三角形個數非常多，所以並不是只有此方法，可以利用圖中其他三角形相似，一樣可以推出勾股定理，此證明與前面的相比，過程複雜不少，花了許多等式才推出勾股定理，學生較難理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				