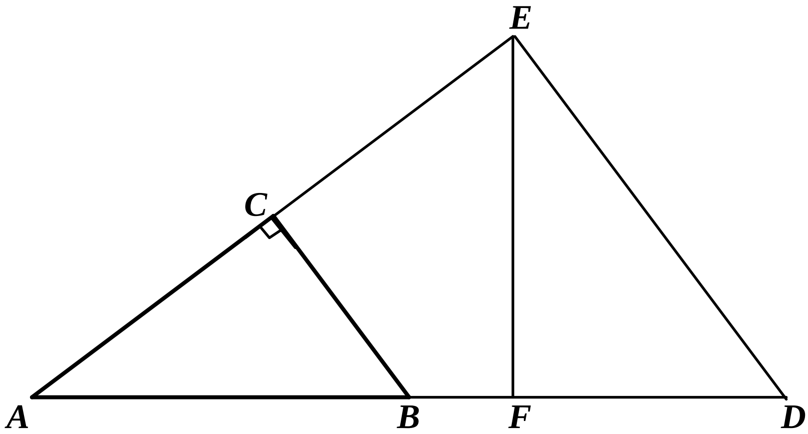
勾股定理證明-A009

【作輔助圖】

1. 延長$\overrightarrow{AB}$，且在$\overrightarrow{AB}$上任取一點D，並從D點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overrightarrow{AC}$於E點。

2. 從E點作$\overline{AD}$的垂線，交$\overline{AD}$於F點。



【求證過程】

在直角三角形ABC外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形ABC與三角形ADE、三角形AEF、三角形EDF皆相似：

   因為$\angle ACB = \angle AED = 90°$且$\angle BAC = \angle DAE$，可推得$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (AA 相似)，同理，可推得$\Delta ABC \sim \Delta AEF$, $\Delta ADE \sim \Delta EDF$，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim \Delta AEF \sim \Delta EDF.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形AEF與三角形EDF相似可知：$\overline{AF} : \overline{EF} = \overline{EF} : \overline{DF}$，整理得

$$\overline{EF}^2 = \overline{AF} \times \overline{DF}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形ADE與三角形EDF相似可知：$\overline{AD} : \overline{DE} = \overline{DE} : \overline{DF}$，整理得

$$
\begin{aligned}
\overline{DE}^2 &= \overline{AD}\times\overline{DF} \\
&= \left(\overline{AF}+\overline{DF}\right)\times\overline{DF} \\
&= \overline{AF}\times\overline{DF}+\overline{DF}^2,
\end{aligned}
$$

將第 2 點的等式 $\overline{EF}^2=\overline{AF}\times\overline{DF}$ 代入上式，得

$$\overline{DE}^2=\overline{EF}^2+\overline{DF}^2.$$

4. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 EDF 相似可知：$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{DF}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{DF}=\overline{BC}\times\overline{DE},$$

   又可知：$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{EF}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{EF}=\overline{AC}\times\overline{DE}.$$

5. 將第 4 點的兩個等式平方後相加整理，推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2\times\overline{DF}^2+\overline{AB}^2\times\overline{EF}^2=\overline{BC}^2\times\overline{DE}^2+\overline{AC}^2\times\overline{DE}^2$$
$$\overline{AB}^2\times\left(\overline{DF}^2+\overline{EF}^2\right)=\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2\right)\times\overline{DE}^2,$$

   將第 3 點的等式 $\overline{DE}^2=\overline{EF}^2+\overline{DF}^2$ 代入上式，得

$$\overline{AB}^2\times\overline{DE}^2=\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2\right)\times\overline{DE}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(6/7), 171.

2. 心得：

此證明如果取的 D 點與 B 點重疊，則與 A001 相同，而 F 點與 B 點重疊，則與 A012 類似，一樣利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，而在證明過程中，就已經有證出在 ΔDEF 中有勾股定理相關的等式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				