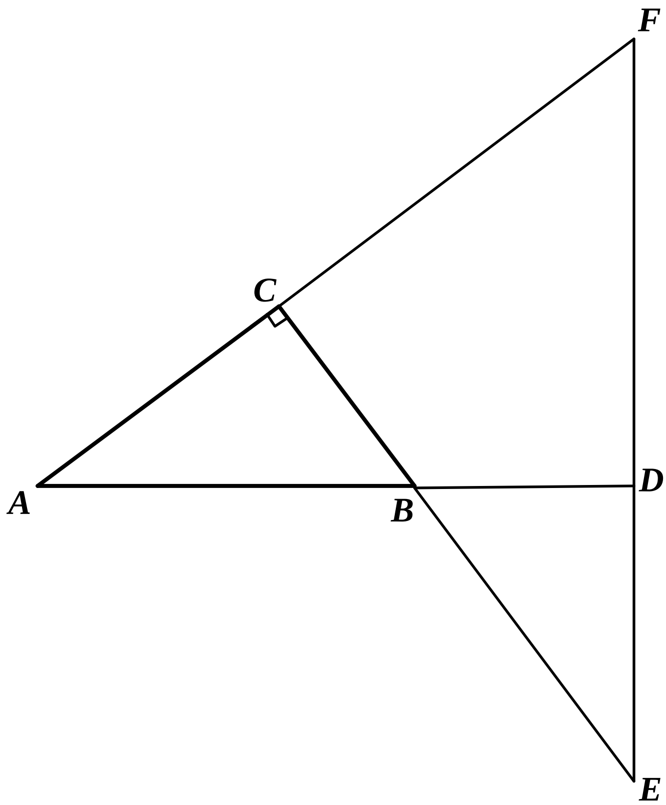
勾股定理證明-A007

【作輔助圖】

1. 延長 $\overrightarrow{AB}$，且在 $\overrightarrow{AB}$ 上任意取一點 D，並從 D 點作 $\overline{AD}$ 的垂線。

2. 延長 $\overrightarrow{BC}$ 及 $\overrightarrow{AC}$，分別與垂線交於 E 及 F 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 AFD、三角形 EFC、三角形 EBD 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle ADF = 90°$ 且 $\angle BAC = \angle FAD$，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta AFD$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta AFD \sim \Delta EFC$, $\Delta EFC \sim \Delta EBD$，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta AFD \sim \Delta EFC \sim \Delta EBD.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 EBD 相似可知：$\overline{AB}:\overline{BE} = \overline{BC}:\overline{BD}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BE}\times\overline{BC}.$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 EFC 相似可知：$\overline{BC}:\overline{CF}=\overline{AC}:\overline{CE}$，整理得

$$\overline{BC}\times\left(\overline{BC}+\overline{BE}\right)=\overline{AC}\times\overline{CF}$$
$$\overline{BC}^2+\overline{BC}\times\overline{BE}=\overline{AC}\times\overline{CF}.$$

4. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係，並將等式整理，推出勾股定理的關係式：

   由三角形 ABC 與三角形 AFD 相似可知：$\overline{AB}:\overline{AF}=\overline{AC}:\overline{AD}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{AF}\times\overline{AC}$$
$$\overline{AB}\times\left(\overline{AB}+\overline{BD}\right)=\left(\overline{AC}+\overline{CF}\right)\times\overline{AC}$$
$$\overline{AB}^2+\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{AC}^2+\overline{CF}\times\overline{AC}.$$

   將第 2 點及第 3 點的等式 $\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BE}\times\overline{BC}$ 及 $\overline{BC}^2+\overline{BC}\times\overline{BE}=\overline{AC}\times\overline{CF}$ 代入上式，得

$$\overline{AB}^2+\overline{BE}\times\overline{BC}=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+\overline{BC}\times\overline{BE}$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(4), 113.

2. 心得：

   此證明與前面幾個的證明非常相像，如果取的 D 點與 B 點重疊，則與 A002 相同，而 D 點在 $\overline{AB}$ 之間，則與 A006 類似，可以考慮與 A006 合併成同一個證明，一樣利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				