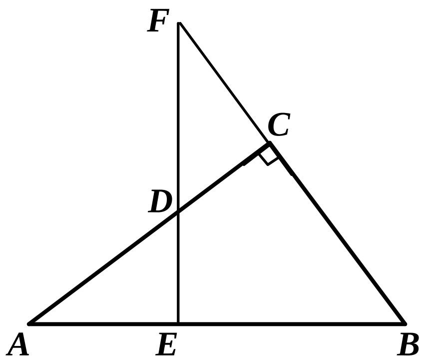
勾股定理證明-A006

【作輔助圖】

1. 在 $\overline{AC}$ 上任意取 D 點。

2. 從 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 E 點。

3. 將 $\overline{BC}$ 與 $\overline{DE}$ 延長，交於 F 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中所有的三角形皆相似，再利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ABC 與三角形 ADE 、三角形 FBE 、三角形 FDC 皆相似：

   因為 $\angle ACB = \angle AED = 90°$ 且 $\angle BAC = \angle DAE$ ，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (AA 相似)，同理，可推得 $\Delta ABC \sim \Delta FBE$, $\Delta FBE \sim \Delta FDC$ ，所以

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim \Delta FBE \sim \Delta FDC.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 ADE 相似可知： $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}$ ，整理得

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{AE} &= \overline{AD} \times \overline{AC} \\ &= (\overline{AC} - \overline{CD}) \times \overline{AC} \\ &= \overline{AC}^2 - \overline{CD} \times \overline{AC}.\end{aligned}$$

3. 同樣利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 FDC 相似可知： $\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{AC} : \overline{CF}$ ，整理得

$$\overline{BC}\times\overline{CF}=\overline{CD}\times\overline{AC}.$$

4. 再利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係，並將等式整理，推出勾股定理的關係式：

   由三角形 ABC 與三角形 FBE 相似可知：$\overline{AB}:\overline{BF}=\overline{BC}:\overline{BE}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BF}\times\overline{BC}$$
$$\overline{AB}\times\left(\overline{AB}-\overline{AE}\right)=\left(\overline{BC}+\overline{CF}\right)\times\overline{BC}$$
$$\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{AE}=\overline{BC}\times\overline{CF}+\overline{BC}^2.$$

   將第 2 點及第 3 點的等式 $\overline{AB}\times\overline{AE}=\overline{AC}^2-\overline{CD}\times\overline{AC}$ 及 $\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{AE}=\overline{BC}\times\overline{CF}+\overline{BC}^2$ 代入上式，得

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2+\overline{CD}\times\overline{AC}=\overline{CD}\times\overline{AC}+\overline{BC}^2$$
$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(4), 111-112.

2. 心得：

   此證明利用三角形相似的性質，來找出一些等式，再將等式整理推出勾股定理，不過此證明的相似三角形有四個，所以需要用到的等式比前幾個證明的還多，看起來也較繁瑣。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		