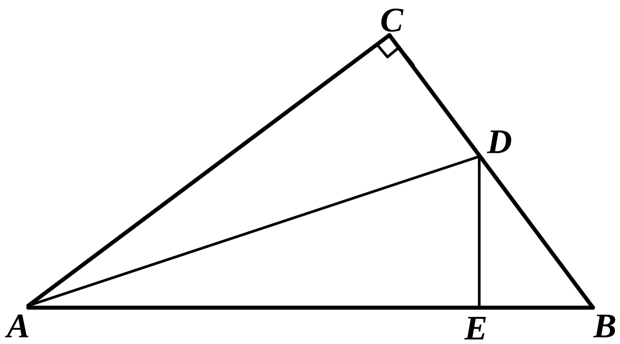
勾股定理證明-A005

【作輔助圖】

1. 作 $\angle CAB$ 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

2. 從 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 E 點。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 內作輔助線，讓裡面形成另外三個直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等或相似，最後利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 ACD 與三角形 AED 全等：

   因為 $\angle DAC = \angle EAC$, $\angle DCA = \angle DEA = 90°$ 且 $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，所以

   $$\Delta ACD \cong \Delta AED \text{(AAS 全等)},$$

   可推得

   $$\overline{CD} = \overline{DE},\ \overline{AC} = \overline{AE}.$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 DBE 相似，並推出兩三角形的邊長關係：

   因為 $\angle ACB = \angle DEB = 90°$ 且 $\angle ABC = \angle DBE$ ，所以可推得

   $$\Delta ABC \sim \Delta DBE \text{(AA 相似)}.$$

   由此可知： $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{BE}$ ，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{BC}\times\overline{BD}$$
$$\overline{AB}\times\left(\overline{AB}-\overline{AE}\right)=\overline{BC}\times\left(\overline{BC}-\overline{BD}\right)$$
$$\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{AE}=\overline{BC}^2-\overline{BC}\times\overline{BD}$$
$$\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}^2-\overline{BC}\times\overline{BD}.$$

3. 同樣利用第 2 點的三角形相似性質，推出兩三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 DBE 可知：$\overline{BC}:\overline{BE}=\overline{AC}:\overline{DE}$，整理得

$$\overline{BC}\times\overline{DE}=\overline{AC}\times\overline{BE}$$
$$\overline{BC}\times\overline{BD}=\overline{AC}\times\left(\overline{AB}-\overline{AE}\right)$$
$$\overline{BC}\times\overline{BD}=\overline{AC}\times\overline{AB}-\overline{AC}\times\overline{AE}$$
$$\overline{BC}\times\overline{BD}=\overline{AC}\times\overline{AB}-\overline{AC}^2.$$

4. 將第 2 點及第 3 點的等式相減整理，推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2-\overline{AB}\times\overline{AC}-\overline{BC}\times\overline{BD}=\overline{BC}^2-\overline{BC}\times\overline{BD}-\overline{AC}\times\overline{AB}+\overline{AC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

   根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是他在 1926 年 2 月 23 日想出來。

2. 心得：

   此證明其實與 A003 是非常相似的，圖中的 D 點是利用角 A 的角平分線作出，A003 雖然沒提到，但其實 D 點就是在角 B 的角平分線上，所以推論的步驟也非常相像，一樣是利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並簡單將等式整理，即可推出勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		