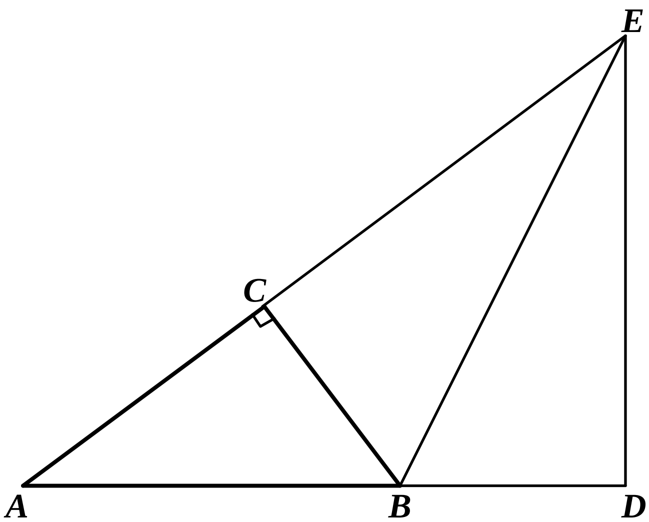
勾股定理證明-A004

【作輔助圖】

1. 延長 $\overrightarrow{AB}$，且在 $\overrightarrow{AB}$ 上取一點 D，使得 $\overline{BD}=\overline{BC}$。

2. 從 D 點作 $\overline{AD}$ 的垂線，交 $\overrightarrow{AC}$ 於 E 點。

3. 連接 $\overline{BE}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 外作輔助線，形成另外的直角三角形，先說明圖中部分的三角形全等或相似，最後利用相似形「對應邊成比例」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 BDE 與三角形 BCE 全等：

   因為 $\angle BDE=\angle BCE=90°$, $\overline{BD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{BE}=\overline{BE}$，所以

   $$\Delta BDE\cong\Delta BCE\text{ (RHS 全等)},$$

   可推得

   $$\overline{DE}=\overline{CE}.$$

2. 再證明三角形 ABC 與三角形 AED 相似，並推出兩三角形的邊長關係：

   因為 $\angle ADE=\angle ACB=90°$ 且 $\angle CAB=\angle DAE$，所以可推得

$$\Delta ABC \sim \Delta AED \text{(AA 相似)}.$$

由此可知：$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AD}$，整理得

$$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{AE}$$
$$\overline{AB}\times\left(\overline{AB}+\overline{BD}\right)=\overline{AC}\times\left(\overline{AC}+\overline{CE}\right)$$
$$\overline{AB}^2+\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}^2+\overline{AC}\times\overline{DE}.$$

3. 同樣利用第 2 點的三角形相似性質，推出兩三角形的邊長關係：

   由三角形 ABC 與三角形 AED 相似可知：$\overline{BC}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{AD}$，整理得

$$\overline{BC}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{BC}\times\left(\overline{AB}+\overline{BD}\right)=\overline{AC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{BC}\times\overline{AB}+\overline{BC}^2=\overline{AC}\times\overline{DE}.$$

4. 將第 2 點及第 3 點的等式相減整理，推出勾股定理的關係式：

$$\overline{AB}^2+\overline{AB}\times\overline{BC}-\overline{BC}\times\overline{AB}-\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AC}\times\overline{DE}-\overline{AC}\times\overline{DE}$$
$$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(3), 67.

2. 心得：

   此證明與 A003 類似，A003 的 D 點是在 $\overline{AB}$ 上，此證明的 D 點則是在射線 $\overrightarrow{AB}$ 上，也一樣是利用三角形相似的性質，來找出一些等式，並簡單將等式整理，即可推出勾股定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	