勾股定理證明-G229

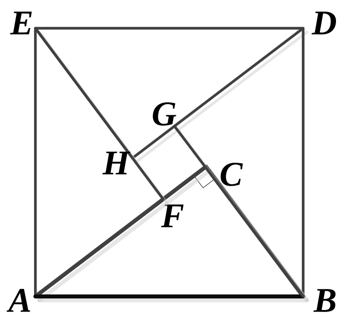
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$ 。

2. 從 E 點作 $\overline{EF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。

3. 延長 $\overline{BC}$ 使 $\overline{BG}=\overline{AC}$ 。

4. 從 D 點作 $\overline{DH}$ 垂直 $\overline{EF}$ （於證明過程第 1 點說明 $D-G-H$ 三點共線）。



【求證過程】

如圖正方形 $ABDE$ 可視為四個三角形與中間四邊形的和，說明圖中四個三角形皆全等，接著運用作圖的分割部分計算正方形 $ABDE$ 的面積，整理式子之後即可得勾股定理關係式。

1. 證明圖中四個三角形全等，進一步說明 $D-G-H$ 三點共線：

因為 $\angle EAF+\angle CAB=90°=\angle ABC+\angle CAB$，所以 $\angle EAF=\angle ABC$ ；因為 $\overline{EF}\perp\overline{AC}$，所以 $\angle EFA=90°=\angle ACB$，因為 $\overline{AE}=\overline{AB}$，及前述 $\angle EAF=\angle ABC$， $\angle EFA=\angle ACB$，所以

$$\Delta EAF\cong\Delta ABC\,(\text{AAS 全等});$$

因為 $\angle DBG+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以 $\angle DBG=\angle BAC$，因為 $\overline{BD}=\overline{AB}$， $\overline{BG}=\overline{AC}$，及前述 $\angle DBG=\angle BAC$，所以

$$\Delta BDG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等});$$

因為 $\angle DEH+\angle AEF=90°=\angle EAF+\angle AEF$，所以 $\angle DEH=\angle EAF=\angle ABC$ ；因為 $\overline{DH}\perp\overline{EF}$，所以 $\angle DHE=90°=\angle ACB$，因為 $\overline{DE}=\overline{AB}$，及前述 $\angle DEH=\angle ABC$， $\angle DHE=$

$\angle ACB$, 所以

$$\Delta DEH \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

由上可推得 $\angle EDH + \angle BDG = \angle BAC + \angle ABC = 90°$, 因此 $D - G - H$ 三點共線。

2. 運用圖形的分割及拼湊計算正方形 $ABDE$ 的面積：

因為第 1 點可知 $\Delta EAF \cong \Delta BGD \cong \Delta DEH \cong \Delta ABC$, 所以由圖形可知 $CGHF$ 是邊長為 $\left(\overline{AC} - \overline{BC}\right)$ 的正方形，因此由圖形得

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta EAF + \Delta BGD + \Delta DEH + \Delta ABC + \square CGHF \\
&= 4\Delta ABC + \square CGHF \\
&= 4\frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} + \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right)^2 \\
&= 2\overline{BC} \times \overline{AC} + \left(\overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2\right) \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 .
\end{aligned}$$

3. 整理第 3 點的結果，找出直角 ABC 三角形三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 所以由第 2 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 ,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

Edward Olney(1872). *A Treatise on Special or Elementary Geometry*(p.250). New York: Sheldon.

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.155). New York ; Macmillan and co..

Benj. F. Yanney and James A.(1899). Calderhead, New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 3*(3), 69.

Arthur R. Colburn, LL.M.(1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement, 70*, 359.

J. Versluys(1914). Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)(p. 68). Amsterdam: A. Versluys.

E. Fourrey(1907). *Curiosités Géométriques*(p.22). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此證明的方法運用圖形的分割去計算正方形面積，可直接得到直角三角形的三個邊長關係，因為過程並不困難，所以適合讓學生去作圖形的拼湊及運算，但由於圖形中並沒有涉及勾股定理的面積意義，所以可能不適合作為啟

蒙例；此證明類似 G228 的正方形第二種表示法。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	