勾股定理證明-G228

【作輔助圖】

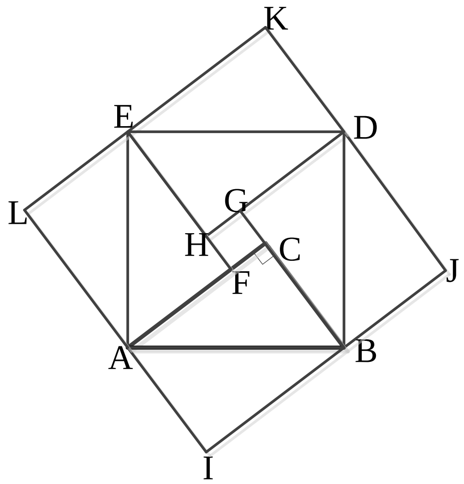
1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$。

2. 從E點作$\overline{EF}$垂直$\overline{AC}$。

3. 延長$\overline{BC}$使$\overline{BG}=\overline{AC}$。

4. 從D點作$\overline{DH}$垂直$\overline{EF}$(於證明過程第 1 點中說明$D-G-H$三點共線)。

5. 從A點作$\overline{AI}$平行$\overline{BC}$，$\overline{BI}$平行$\overline{AC}$，形成長寬分別為$\overline{AC}$及$\overline{BC}$的矩形$ACBI$，類似前述作法作矩形$BJDG$，$DKEH$，$ALEF$，形成以$\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)$為邊長的正方形$IJKL$。



【求證過程】

說明圖中直角三角形皆全等，則正方形$ABDE$可視為外圍大正方形扣除四個直角三角形面積，即扣除兩個矩形面積；另外正方形$ABDE$也可視為兩個矩形加上中間小正方形面積，整理前述兩種正方形$ABDE$面積關係可得勾股定理關係式。

1. 證明圖中四個三角形全等，進一步說明$D-G-H$三點共線：

因為$\angle EAF+\angle CAB=90°=\angle ABC+\angle CAB$，所以$\angle EAF=\angle ABC$；因為$\overline{EF}\perp\overline{AC}$，所以$\angle EFA=90°=\angle ACB$，因為$\overline{AE}=\overline{AB}$，及前述$\angle EAF=\angle ABC$，$\angle EFA=\angle ACB$，所以

$$\Delta EAF\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等});$$

因為$\angle DBG+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以$\angle DBG=\angle BAC$，因為$\overline{BD}=\overline{AB}$，$\overline{BG}=\overline{AC}$，及前述$\angle DBG=\angle BAC$，所以

$$\Delta BDG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等);}$$

因為 $\angle DEH + \angle AEF = 90° = \angle EAF + \angle AEF$，所以 $\angle DEH = \angle EAF = \angle ABC$； 因為 $\overline{DH} \perp \overline{EF}$，所以 $\angle DHE = 90° = \angle ACB$，因為 $\overline{DE} = \overline{AB}$，及前述 $\angle DEH = \angle ABC$， $\angle DHE = \angle ACB$，所以

$$\Delta DEH \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等),}$$

由上可推得 $\angle EDH + \angle BDG = \angle BAC + \angle ABC = 90°$，因此 $D-G-H$ 三點共線。

2. 以兩種不同表示方法計算正方形 $ABDE$ 的面積：

由第 1 點及作圖過程第 3 點可知圖中有 8 個全等直角三角形，所以由圖形可得

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square IJKL - \Delta ABI - \Delta BDJ - \Delta DEK - \Delta AEL \\ &= \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)^2 - 2\square ACBI \\ &= \left(\overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2\right) - 2\overline{AC} \times \overline{BC};\end{aligned}$$

因為由作圖過程可得 $CFGH$ 為正方形，所以另外也可將正方形 $ABDE$ 面積表示為

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square CFGH + \Delta ABC + \Delta BDG + \Delta DEH + \Delta AEF \\ &= \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right)^2 + 2\square ACBI \\ &= \left(\overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2\right) + 2\overline{AC} \times \overline{BC}.\end{aligned}$$

3. 由第 2 點的兩種正方形 $ABDE$ 表示法可整理邊長關係式：

因為 $\square ABDE = \overline{AB}^2$，所以由上述兩種 $\square ABDE$ 表示法分別可知

第一種表示法得

$$\overline{AB}^2 = \left(\overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2\right) - 2\overline{AC} \times \overline{BC},$$

第二種表示法得

$$\overline{AB}^2 = \left(\overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2\right) + 2\overline{AC} \times \overline{BC},$$

將上述兩種表示法結果相加得

$$2\overline{AB}^2 = 2\overline{BC}^2 + 2\overline{AC}^2,$$

所以可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   J. Versluys(1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)*(p. 72). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：證明中把兩種正方形 *ABDE* 面積關係式相加後得到畢氏定理關係，實質上不需要這個步驟即可說明勾股定理，且兩種正方形 *ABDE* 面積表示法皆可得。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				