勾股定理證明-G227

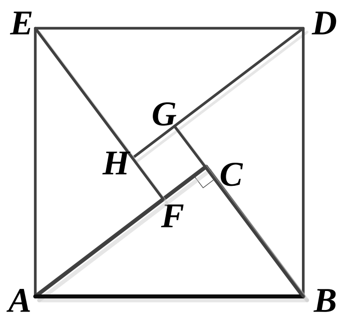
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作正方形 $ABDE$ 。

2. 從 E 點作 $\overline{EF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。

3. 延長 $\overline{BC}$ 使 $\overline{BG}=\overline{AC}$ 。

4. 從 D 點作 $\overline{DH}$ 垂直 $\overline{EF}$ （於證明過程第 1 點說明 $D-G-H$ 三點共線）。



【求證過程】

如圖正方形 $ABDE$ 可視為四個三角形與中間四邊形的和，說明圖中四個三角形皆全等，接著將圖形重新組合為邊長為 $\overline{BC}$ 的正方形(可重疊)，運用新圖形計算原正方形的面積，整理式子之後即可得勾股定理關係式。

1. 證明圖中四個三角形全等，進一步說明 $D-G-H$ 三點共線：

因為 $\angle EAF+\angle CAB=90°=\angle ABC+\angle CAB$，所以 $\angle EAF=\angle ABC$，因為 $\overline{EF}\perp\overline{AC}$，所以 $\angle EFA=90°=\angle ACB$. 因為 $\overline{AE}=\overline{AB}$，及前述 $\angle EAF=\angle ABC$， $\angle EFA=\angle ACB$，所以

$$\Delta EAF\cong\Delta ABC\text{ (AAS 全等)};$$

因為 $\angle DBG+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以 $\angle DBG=\angle BAC$. 因為 $\overline{BD}=\overline{AB}$， $\overline{BG}=\overline{AC}$，及前述 $\angle DBG=\angle BAC$，所以

$$\Delta BDG\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)};$$

因為 $\angle DEH+\angle AEF=90°=\angle EAF+\angle AEF$，所以 $\angle DEH=\angle EAF=\angle ABC$，因為 $\overline{DH}\perp\overline{EF}$，所以 $\angle DHE=90°=\angle ACB$. 因為 $\overline{DE}=\overline{AB}$，及前述 $\angle DEH=\angle ABC$， $\angle DHE=$

$\angle ACB$，所以

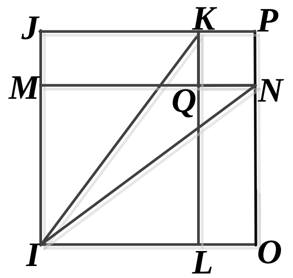
$$\Delta DEH \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

由上可推得 $\angle EDH + \angle BDG = \angle BAC + \angle ABC = 90°$，因此 $D-G-H$ 三點共線。

2. 由圖形的分割，將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：

   由第 1 點可知 $\Delta EAF \cong \Delta BDG \cong \Delta DEH \cong \Delta ABC$，且四邊形 $CGHF$ 邊長皆為$(\overline{AC}-\overline{BC})$,

   所以可將原正方形 $ABDE$ 的四個三角形兩兩拼接成矩形，接著將兩個矩形的長邊與短邊對齊，示意如下圖的矩形 $IJKL$ 與 $IMNO$ 且將小正方形 $CGHF$ 與之合併置於 $KPNQ$ 的位置， 如下圖



   因為 $\Delta EAF \cong \Delta BDG \cong \Delta DEH \cong \Delta ABC$，所以矩形 $IJKL$， $IMNO$，的長寬皆為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$，

   所以由圖形可知

   $$IJPO \text{ 是邊長為 } \overline{AC} \text{ 的正方形；}$$

   同理

   $$IMQL \text{ 是邊長為 } \overline{BC} \text{ 的正方形。}$$

3. 由正方形 $ABDE$ 重新拼湊後的新圖形計算正方形 $ABDE$ 面積：
   由圖形及第 2 點可知

   $$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta EAF + \Delta BGD + \Delta DEH + \Delta ABC + \square CGHF \\ &= \square IJKL + \square IMNO + \square KPNQ \\ &= \square IMQL + IJPO \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \ .\end{aligned}$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，所以由第 3 點結論可推得

   $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   J. Versluys(1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)*(p. 69). Amsterdam : A. Versluys.
   根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1934 年 6 月 5 日想到的。
2. 心得：本證明與 G225 類似，差別在於重新拼湊的兩個正方形表示方法不同，本證明重新拼湊的圖形將兩正方形作重疊，雖然如此一來較難真實操作，但就圖形而言則較容易看出兩正方形的邊長。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●