勾股定理證明-G225

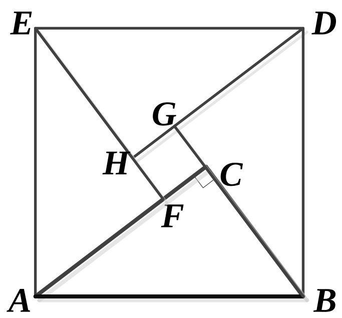
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$。

2. 從E點作$\overline{EF}$垂直$\overline{AC}$。

3. 延長$\overline{BC}$使$\overline{BG}=\overline{AC}$。

4. 從D點作$\overline{DH}$垂直$\overline{EF}$（於證明過程第1點說明$D-G-H$三點共線）。



【求證過程】

如圖正方形$ABDE$可視為四個三角形與中間四邊形的和，說明圖中四個三角形皆全等，接著將圖形重新排列為兩個正方形，得到正方形$ABDE$與兩個正方形的面積關係，整理式子之後即可得勾股定理關係式。

1. 證明圖中四個三角形全等，進一步說明$D-G-H$三點共線：

因為$\angle EAF+\angle CAB=90°=\angle ABC+\angle CAB$，所以$\angle EAF=\angle ABC$；因為$\overline{EF}\perp\overline{AC}$，所以$\angle EFA=90°=\angle ACB$，因為$\overline{AE}=\overline{AB}$，及前述$\angle EAF=\angle ABC$，$\angle EFA=\angle ACB$，所以

$$\Delta EAF\cong\Delta ABC\,(\text{AAS 全等});$$

因為$\angle DBG+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以$\angle DBG=\angle BAC$，因為$\overline{BD}=\overline{AB}$，$\overline{BG}=\overline{AC}$，及前述$\angle DBG=\angle BAC$，所以

$$\Delta BDG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等});$$

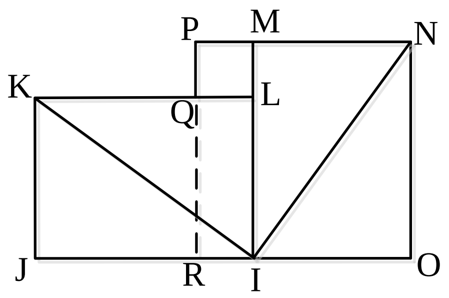
因為$\angle DEH+\angle AEF=90°=\angle EAF+\angle AEF$，所以$\angle DEH=\angle EAF=\angle ABC$；因為$\overline{DH}\perp\overline{EF}$，所以$\angle DHE=90°=\angle ACB$，因為$\overline{DE}=\overline{AB}$，及前述$\angle DEH=\angle ABC$，$\angle DHE=\angle ACB$，所以

$$\Delta DEH \cong \Delta ABC\,(\text{AAS 全等}),$$

由上述可推得 $\angle EDH + \angle BDG = \angle BAC + \angle ABC = 90°$，因此 $D-G-H$ 三點共線。

2. 由圖形的分割，將正方形 $ABDE$ 重新拼湊：

   由第 1 點可知 $\Delta EAF \cong \Delta BDG \cong \Delta DEH \cong \Delta ABC$，且四邊形 $CGHF$ 邊長皆為($\overline{AC} - \overline{BC}$),所以可將原正方形 $ABDE$ 的四個三角形拼接成兩個矩形，且將小正方形與之合併，並延長 $\overline{PQ}$ 做輔助線 $\overline{QR}$，如下圖：



   因為 $\Delta EAF \cong \Delta BDG \cong \Delta DEH \cong \Delta ABC$，所以矩形 $MNOI$，矩形 $JKLI$ 的長與寬皆為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$，因為 $\overline{PM} = \overline{IR} = \overline{AC} - \overline{BC}$，推得 $\overline{JR} = \overline{KQ} = \overline{AC} - (\overline{AC} - \overline{BC}) = \overline{BC}$，所以

$$JKQR\ \text{是邊長為}\ \overline{BC}\ \text{的正方形；}$$

   同理因為 $\overline{PN} = \overline{OR} = \overline{BC} + (\overline{AC} - \overline{BC}) = \overline{AC}$，所以

$$PNOR\ \text{是邊長為}\ \overline{AC}\ \text{的正方形。}$$

3. 由正方形 $ABDE$ 重新拼湊後的新圖形計算其面積：

   由第 2 點可知

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square JKQR + \square PNOR \\ &= \overline{BC} \times \overline{BC} + \overline{AC} \times \overline{AC} \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2.\end{aligned}$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明原發想來自於 12 世紀的印度數學家婆什迦羅(Bhāskara)，除此之外還收錄於以下書籍與期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly, 6*(3), 69.

   Wooster Woodruff Beman and David Eugene Smith(1899). *New Plane Geometry*(p.104). Boston: Ginn & company.

   E. Fourrey(1907). *Curiosités Géométriques*(p. 83), Paris: Vuibert et Nony.

   J. Versluys(1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)*(p.31). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：本證明將原正方形的切割圖形重新組合成兩個正方形，這與之前的證明差異較大，之前圖形大多都是將各區塊分割好，再將圖形改變擺放區域，而此證明需從無到有透過想像力去拼湊，若給學生動手操作，相信應該會很有趣。

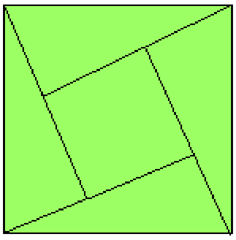
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：簡述婆什迦羅證明勾股定理的故事：

   此證明(G225)原著為十二世紀印度數學家婆什迦羅(Bhāskara, 1114－1185)，也稱為婆什迦羅第二(Bhāskara II)和 Bhāskara Achārya (翻譯為：教師婆什迦羅)，在很多方面，婆什迦羅代表了十二世紀數學知識的巔峰。

   此證明(G225)原貌僅有一張圖及一個字「瞧!(Behold!)」(如下圖)，即完成證明，並未作其他說明，此證明原貌可謂是勾股定理數百個證明中最短的一個，但原貌對閱讀者來說是相當難理解圖中的意義，後人再為其圖形作註解，作出如上述證明過程第 2 點的圖形，便有助於重建婆什迦羅的證明。此證明也可與中國趙爽的「勾股圓方圖注」作比較，兩者基本構想相同，兩者圖形差異不大，但趙爽是證明 $a^2 + b^2 = c^2$ ，而婆什迦羅則反其道而行，證明 $c^2 = a^2 + b^2$ 。



Behold !