勾股定理證明-G224

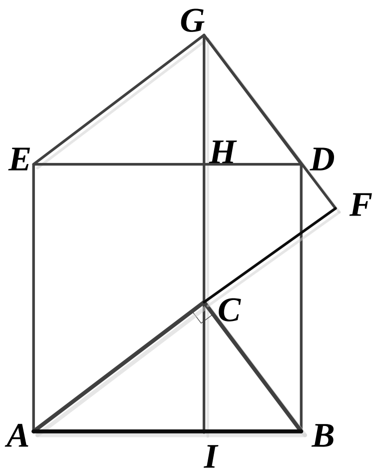
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ 。

2. 延長 $\overline{AC}$ 使 $\overline{CF}=\overline{BC}$ 。

3. 以 $\overline{DE}$ 為底邊作三角形 EDG 全等於三角形 ABC ，連接 $\overline{DF}$（於證明第 2 點說明 $G-D-F$ 三點共線）。

4. 過 C 點作 $\overline{GI}$ 垂直 $\overline{AB}$ ，且交 $\overline{DE}$ 於 H 點。



【求證過程】

如圖正方形 $ABDE$ 可視為兩長方形面積的面積和，再利用且長方形面積又與圖形中平行四邊形面積相等，運用此關係計算正方形 $ABDE$ 面積，可得原直角三角形邊長關係，即可得勾股定理關係式。

1. 說明正方形 $ABDE$ 面積相當於圖形中兩平行四邊形的和：
   因為 $\Delta EDG \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{DG}=\overline{BC}$ 且因為 $\overline{DG}\,//\,\overline{BC}$，所以可知 $BCGD$ 為平行四邊形，同理 $ACGE$ 也為平行四邊形；

   因為 $\square\ BCGD=\overline{BD}\times\overline{BI}=\square\ BDHI$ ，同理，$\square\ AEGC=\overline{AE}\times\overline{AI}=\square\ AEHI$ ，所以由前述及圖形可推得

   $$\square ABDE=\square BCGD+\square AEGC.$$

2. 證明三角形 GCF 全等於三角形 ABC ，運用對應邊等長性質計算平行四邊形 $BCFD$ 及平行四邊形面積 $ACFE$ 面積：
   因為 $\angle CAI+\angle ACI=90^{\circ}=\angle CAI+\angle ABC$，所以 $\angle ACI=\angle ABC$，即 $\angle GCF=\angle ABC$，

因為$\overline{CF}=\overline{BC}$，$\overline{CG}=\overline{AB}$及前述$\angle GCF=\angle ABC$，所以

$$\Delta GCF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

可進一步推得$G-D-F$三點共線，且因為$\overline{GF}=\overline{AC}$，$\angle CFG=90°$，所以可進一步得

$$\square BCGD=\overline{GD}\times\overline{CF}=\overline{BC}\times\overline{BC},$$

及

$$\square ACGE=\overline{AC}\times\overline{GF}=\overline{AC}\times\overline{AC}.$$

3. 運用前述結論計算正方形 $ABDE$ 面積：
   由圖形及前述第 2, 3 點可知

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BCGD+\square ACGE\\ &=\overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC}\\ &=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2 .\end{aligned}$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE$ 邊長為$\overline{AB}$，所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明及圖形設計是 Wilson Thornton 在 1939 年 5 月 16 日所提供的，原創者是 Wilson Thornton 在中學教書時的學生 Gustav Cass.
2. 心得：此證明與 G223 的手法幾乎相同，兩者差異只有在作圖時，讓平行四邊形的高位置不同，也可視為 G140 的簡化版。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●