勾股定理證明-G223

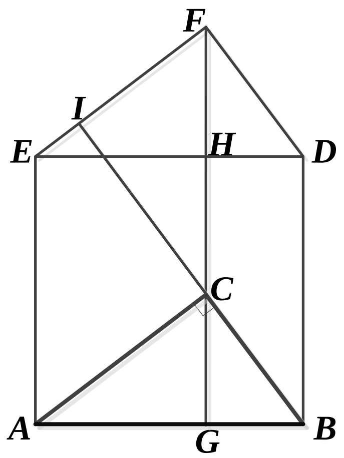
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$。

2. 作$\overline{EF}$平行$\overline{AC}$，$\overline{DF}$平行$\overline{BC}$，使三角形EDF全等於三角形ABC。

3. 過C作$\overline{FG}$垂直$\overline{AB}$，並交$\overline{DE}$於H點。

4. 延長$\overline{BC}$交$\overline{EF}$於I點。



【求證過程】

如圖正方形$ABDE$可視為兩長方形面積和，再利用圖形之間面積相等關係，計算正方形$ABDE$面積，可得原直角三角形邊長關係，即可得勾股定理關係式。

1. 說明正方形$ABDE$面積相當於圖形中兩平行四邊形的和：

   因為$\Delta EDF \cong \Delta ABC$所以$\overline{DF}=\overline{BC}$，且因為$\overline{DF} // \overline{BC}$，所以可知$BCFD$為平行四邊形，同理$ACFE$也為平行四邊形；

   因為$\square BCFD=\overline{BD}\times\overline{BG}=\square BDHG$，同理$\square AEFC=\overline{AE}\times\overline{AG}=\square AEHG$，所以由前述及圖形可推得

   $$\square ABDE=\square BCFD+\square AEFC.$$

2. 證明三角形CFI全等於三角形ABC，運用對應邊等長性質計算平行四邊形$BCFD$及平行四邊形面積$ACFE$面積：

   因為$\overline{EF} // \overline{AC}$且$\angle ACI=90°$，所以$\angle CIF=90°$；因為$\angle FED+\angle EFH=90°$，且

   $\angle FED+\angle EDF=90°$，所以$\angle EFH=\angle EDF=\angle ABC$，即$\angle IFC=\angle ABC$，

因為 $\overline{CF}=\overline{BD}=\overline{AB}$ 及前述 $\angle CIF=90°=\angle ACB$, $\angle IFC=\angle ABC$, 所以

$$\Delta CFI\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}),$$

由上述 $\Delta CFI\cong\Delta ABC$ 可推得 $\overline{FI}=\overline{BC}$, $\overline{CI}=\overline{AC}$, 所以

$$\square BCFD=\overline{BC}\times\overline{FI}=\overline{BC}\times\overline{BC},$$

及

$$\square ACFE=\overline{AC}\times\overline{IC}=\overline{AC}\times\overline{AC}.$$

3. 運用前述結論計算正方形 $ABDE$ 面積：
由圖形及前述第 2, 3 點可知

$$\begin{aligned}\square ABDE&=\square BCFD+\square AEFC\\&=\overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC}\\&=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2\ .\end{aligned}$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$, 所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
E. Fourrey (1907).*Curiosités Géométriques* (pp. 82-83). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此證明可與 G140 作比較，證明手法同樣是圖形等底同高關係，且圖形類似，而本證明較 G140 作較少輔助部分，因此雖然圖形看起來較簡潔，但從圖形中少了勾股定理的三個正方形面積關係，而從 G140 則可以看出。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●