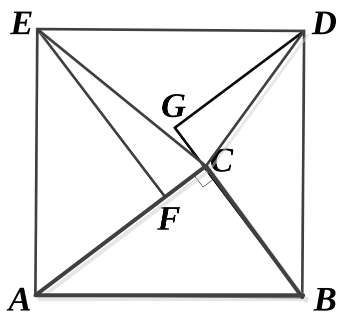
# 勾股定理證明-G222

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$ 。

2. 從 $E$ 點作 $\overline{EF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。

3. 延長 $\overline{BC}$ 使 $\overline{BG}=\overline{AC}$ ，連接 $\overline{DG}$ 。




【求證過程】

利用作圖所產生的圖形分割,將正方形 $ABDE$ 面積視為圖形中兩個三角形面積和的兩倍，整理正方形面積，可得原直角三角形邊長關係，即可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形全等，並求出其對應邊相等關係：

因為 $\angle DBG+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以 $\angle DBG=\angle BAC$，因為 $\overline{BD}=\overline{AB}$，

$\overline{BG}=\overline{AC}$，及前述 $\angle DBG=\angle BAC$，所以

$$\Delta BDG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

可推得

$$\overline{DG}=\overline{BC};$$

因為 $\angle EAF+\angle BAC=90°=\angle ABC+\angle BAC$，所以 $\angle EAF=\angle ABC$，因為 $\angle EFA=\angle ACB$，

$\overline{AE}=\overline{AB}$，及前述 $\angle EAF=\angle ABC$，所以

$$\Delta EAF\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}),$$

可推得

$$\overline{EF}=\overline{AC}.$$

2. 將正方形 $ACDE$ 圖形重新拼湊並計算其面積：
   由圖形及前述第 1 點及補充①可得

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= 2\left(\Delta BCD + \Delta AEC\right) \\
&= 2\left(\frac{\overline{BC}\times\overline{DG}}{2} + \frac{\overline{AC}\times\overline{EF}}{2}\right) \\
&= \left(\overline{BC}\times\overline{BC} + \overline{AC}\times\overline{AC}\right) \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\ ,
\end{aligned}
$$

3. 整理第 2 點的結果，找出直角三角形 $ABC$ 三邊長關係：

因為$\square ABDE = \overline{AB}^2$, 所以由第 2 點可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

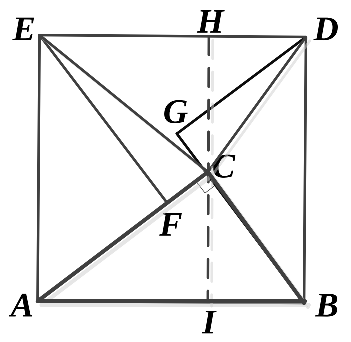
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   F. C Boon(1924). *A Companion to Elementary School Mathematics*(p.104). London: New York Longmans, Green and Co..
2. 心得：此證明與 G212 類似，在作圖過程中皆未作出三個正方形，因此學生在圖中感受不到勾股定理的面積意義，但仍算是並不複雜的證明；因為過程中將運用正方形與三角形的面積關係，若不另外作輔助說明，學生應該較難發現關係，所以在補充①中作說明。
3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | ● | | ● |

4. 補充①：說明正方形 $ABDE$ 面積為 $\Delta BCD$ 與 $\Delta AEC$ 面積和的兩倍：




如上圖，過 $C$ 作輔助線 $\overline{HI}$ 垂直 $\overline{AB}$ ,

因為$\square BDHI=\overline{BD}\times\overline{BI}$，且$\Delta BDC=\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{BI}$，所以得

$$\square BDHI=2\Delta BDC,$$

同理，因為$\square AEHI=\overline{AE}\times\overline{AI}$，且$\Delta ACE=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AI}$，所以可推得

$$\square AEHI=2\Delta ACE,$$

因為$\square ABDE=\square BDHI+\square AEHI$，所以由上述可推得

$$\square ABDE=2(\Delta BDC+\Delta ACE).$$