勾股定理證明-G221

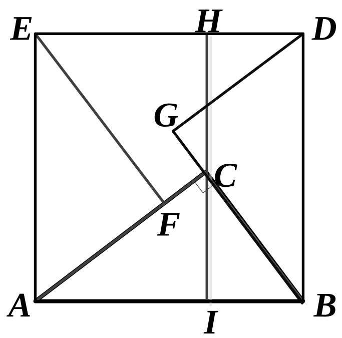
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $ABDE$ 。

2. 從 E 點作 $\overline{EF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。

3. 延長 $\overline{BC}$ 作 $\overline{BG}=\overline{AC}$ ，連接 $\overline{DG}$ 。

4. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DE}$ 的垂線，分別交 $\overline{DE}$ 於 H 點，交 $\overline{AB}$ 於 I 點。



【求證過程】

利用作圖所產生的圖形分割，將正方形 $ABDE$ 面積視為兩個長方形面積和，運用作圖過程求出長方形面積，整理正方形面積式子，即可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形全等，並求出其對應邊相等關係：

   因為 $\angle DBG+\angle ABC=90°=\angle BAC+\angle ABC$，所以 $\angle DBG=\angle BAC$，因為 $\overline{BD}=\overline{AB}$，

   $\overline{BG}=\overline{AC}$，及前述 $\angle DBG=\angle BAC$，所以

   $$\Delta BDG\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

   可推得

   $$\overline{DG}=\overline{BC};$$

   因為 $\angle EAF+\angle BAC=90°=\angle ABC+\angle BAC$，所以 $\angle EAF=\angle ABC$，因為 $\angle EFA=\angle ACB$，

   $\overline{AE}=\overline{AB}$，及前述 $\angle EAF=\angle ABC$，所以

   $$\Delta EAF\cong\Delta ABC\text{ (AAS 全等)},$$

   可推得

   $$\overline{EF}=\overline{AC}.$$

2. 將正方形 $ABDE$ 圖形重新拼湊並計算其面積：

   由圖形及前述第 1 點及補充①可得

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDHI + \square AEHI\\ &= \overline{BC}\times\overline{DG}+\overline{AC}\times\overline{EF}\\ &= \overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC}\\ &= \overline{AC}^2+\overline{BC}^2\ .\end{aligned}$$

3. 整理第 2 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為正方形 $ABDE=\overline{AB}^2$, 所以可得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

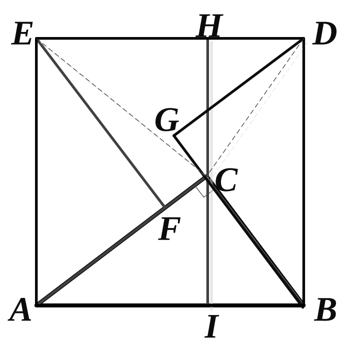
$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Arthur K. Colburn(1911). A Proof Of The Theorem Of Pythagoras, *Mathematics Teacher 4*, 45.
2. 心得：此證明運用圖形的分割及圖形間等底同高的面積關係，因為在作圖過程中並沒有作出三角形的高，因此在求面積時較不直觀，所以在補充①作說明此證明與 G222 類似。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充①：說明長方形 $BDHI$， $AEHI$ 面積求法：



如上圖，連接 $\overline{CD}$ ，因為 $\square BDHI=2\Delta BDC$, 且 $\Delta BDC=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{DG}$, 所以可推得

$$\square\ BDHI=2\Delta BDC=\overline{BC}\times\overline{DG},$$

同理，連接 $\overline{CE}$ ，因為 $\square AEHI=2\Delta ACE$, 且 $\Delta ACE=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{EF}$, 所以可推得

$$\square\ AEHI=2\Delta ACE=\overline{AC}\times\overline{EF}\ .$$