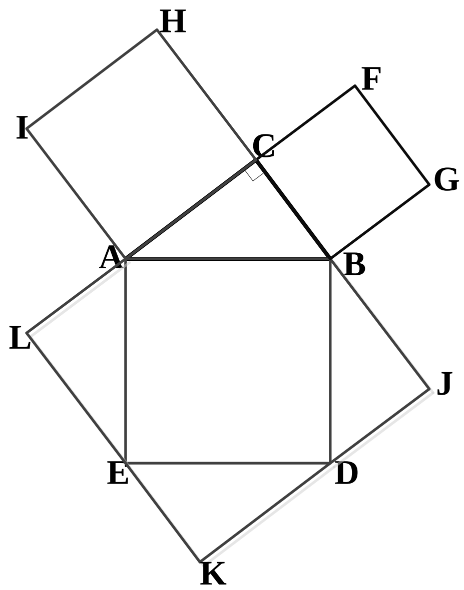
勾股定理證明-G220

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 為邊分別作出正方形 $ABDE$ 、正方形 $BCFG$ 及正方形 $ACHI$ 。
2. 以正方形 $ABDE$ 另外三邊為底，作三角形 BDJ 全等於三角形 ABC，三角形 DEK 全等於三角形 ABC ，三角形 EAL 全等於三角形 ABC 。



【求證過程】

利用作圖所產生的圖形分割，將正方形 $ABDE$ 面積視為外圍大正方形面積扣除四周直角三角形面積，計算正方形 $ABDE$ 的面積並運用邊長關係，可得圖中三個正方形面積關係，即可得勾股定理關係式。

1. 說明正方形 $CJKL$ 的面積：

   因為作圖過程中，我們將四個全等三角形圍成一個正方形 $CJKL$ ，所以可得正方形 $CJKL$ 邊長為 $\overline{AC}+\overline{AL}$，且因為 $\overline{AL}=\overline{BC}$，所以可得

$$
\begin{aligned}
\square CJKL &= \left(\overline{AC}+\overline{AL}\right)^2 \\
&= \left(\overline{AC}+\overline{AB}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

2. 將正方形 $ACDE$ 圖形重新拼湊並計算其面積：

   由作圖過程及由圖形可得

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \square CJKL - 4\Delta ABC \\
&= \left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)^2 - 4\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2} \\
&= \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}\times\overline{BC} + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\times\overline{BC} \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\
&= \square ACHI + \square BCFG
\end{aligned}
$$

3. 由第 2 點的正方形關係，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為 $\square ABDE = \overline{AB}^2$，所以可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras*(p.35). Leipz.: Friese.
   J. Versluys(1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)*(p.70). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：與 G219 雷同，僅於作圖過程多了兩個正方形，雖然較 G219 多了一些步驟才得到證明，但是也比 G219 多了正方形關係，可用來解釋勾股定理的面積意義，若只是要知道直角三角形邊長關係，則建議參考 G219。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		