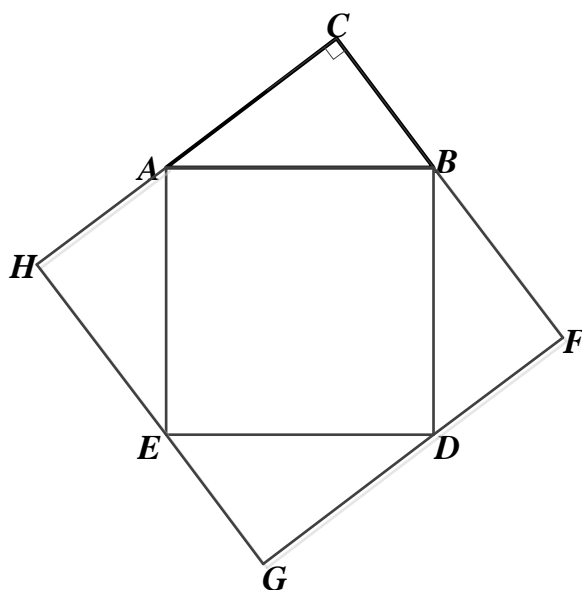


勾股定理證明-G219

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊向外作一正方形 $ABDE$ 。
2. 以正方形 $ABDE$ 另外三邊為底，作三角形 BDF 全等於三角形 ABC ，三角形 DEG 全等於三角形 ABC ，三角形 EAH 全等於三角形 ABC ，且使之形成正方形 $CFGH$ 。



【求證過程】

利用作圖所產生的圖形分割，將正方形 $ABDE$ 面積視為外圍大正方形面積扣除四周直角三角形面積，計算正方形 $ACDE$ 的面積並運用邊長關係，即可得勾股定理關係式。

1. 說明正方形 $CFGH$ 的面積：

因為作圖過程中，我們將四個全等三角形圍成一個正方形 $CFGH$ ，所以可得正方形

$CFGH$ 邊長為 $\overline{AC} + \overline{AH}$ ，且因為 $\overline{AH} = \overline{BC}$ ，所以可得

$$\begin{aligned}\square CFGH &= (\overline{AC} + \overline{AH})^2 \\ &= (\overline{AC} + \overline{BC})^2.\end{aligned}$$

2. 將正方形 $ACDE$ 圖形重新拼湊並計算其面積：

由第 1 點及圖形可得

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square CFGH - 4\Delta ABC \\ &= (\overline{AC} + \overline{BC})^2 - 4 \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} \\ &= \overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.\end{aligned}$$

3. 整理第 2 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE = \overline{AB}^2$ ，所以由 3 點可推得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem, *The American Mathematical Monthly*, 6(3), 70.

2. 心得：此證明透過圖形全等作拼湊並計算面積，得到勾股定理關係式，但因為作圖過程並沒有作出三個正方形，所以學生可能感受不到勾股定理的面積意義，若於教學使用，不建議作為啟蒙例，若要另外引出面積意義可參考 G220。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●