勾股定理證明-G215

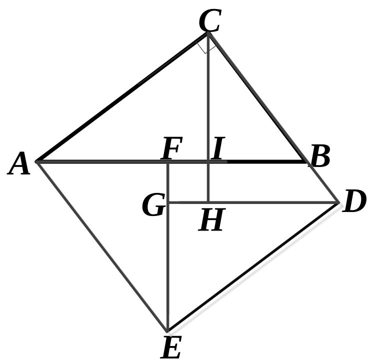
【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACDE$。

2. 從E點作$\overline{EF}$垂直$\overline{AB}$。

3. 從D點作$\overline{DG}$平行$\overline{AB}$。

4. 從C點作$\overline{CH}$垂直$\overline{DG}$且交$\overline{AB}$於I點。



【求證過程】

利用作圖所產生的圖形分割，將正方形$ACDE$面積視為四個三角形與中間的小正方形面積和，計算正方形$ACDE$的面積並運用直角三角形母子相似性質整理面積關係式，即可得勾股定理關係式。

1. 證明圖中三角形全等，並推得四邊形$FGHI$為正方形：

   因為$\overline{DG} // \overline{AB}$，所以$\angle CDH = \angle ABC$，且因為$\angle CAI + \angle ACI = 90° = \angle CAI + \angle ABC$，所以$\angle ACI = \angle ABC = \angle CDH$，因為$\overline{CD} = \overline{AC}$，$\angle CHD = 90° = \angle AIC$，及前述$\angle ACI = \angle CDH$，所以可得

   $$\Delta ACI \cong \Delta CDH \text{ (AAS 全等)};$$

   類似上述的證明過程可得

   $$\Delta ACI \cong \Delta CDH \cong \Delta DEG \cong \Delta EAF,$$

   因為由作圖過程可知四邊形$FGHI$內角皆為$90°$，可知四邊形$FGHI$為一矩形，再由前述三角形的全等關係，可得其邊長$\overline{FI} = \overline{AI} - \overline{AF} = \overline{EF} - \overline{EG} = \overline{FG}$，所以可推得

   四邊形$FGHI$為正方形。

2. 證明三角形之間的相似，並運用對應邊成比例性質找出邊長關係：

   因為$\angle CAI = \angle CAB$，$\angle AIC = 90° = \angle ACB$，所以

   $$\Delta ACI \sim \Delta ABC \text{ (AA 相似)},$$

由前述相似三角形對應邊成比例可得 $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AI}:\overline{AC}$，可推得

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{AI}\,;$$

因為 $\angle CBI=\angle ABC$，$\angle CIB=90^\circ=\angle ACB$，所以

$$\Delta CBI\sim\Delta ABC\ (\text{AA 相似}),$$

由前述相似三角形對應邊成比例可得 $\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{CI}:\overline{AC}$，可推得

$$\overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{CI}\,.$$

3. 將正方形 $ACDE$ 圖形重新拼湊並計算其面積：

   由圖形及前述第 1, 2 點可得

$$\begin{aligned}
\square ACDE&=4\Delta ACI+\square FGHI\\
&=4\times\frac{\overline{AI}\times\overline{CI}}{2}+\left(\overline{AI}-\overline{AF}\right)^2\\
&=2\overline{AI}\times\overline{CI}+\left(\overline{AI}-\overline{CI}\right)^2\\
&=2\overline{AI}\times\overline{CI}+\overline{AI}^2-2\overline{AI}\times\overline{CI}+\overline{CI}^2\\
&=\overline{AI}^2+\overline{CI}^2\\
&=\left(\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}\right)^2+\left(\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2\\
&=\frac{\overline{AC}^4}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{AC}^2\times\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}\\
&=\frac{\overline{AC}^2\times\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\right)}{\overline{AB}^2}\ ,
\end{aligned}$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

   因為 $\square ACDE=\overline{AC}^2$，所以由第 3 點可推得

$$\overline{AC}^2=\overline{AC}^2\times\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\right)\div\overline{AB}^2,$$

   整理上式可得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the

Pythagorean Theorem, *The American Mathematical Monthly, 6*(3), 69.

2. 心得：此證明同樣運用圖形的全等關係做圖形的拼湊，計算面積得到勾股定理關係式，雖然圖形並不複雜，但運用到較多的運算，其中運用到相似三角形的性質，與先前的證明較不同。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●