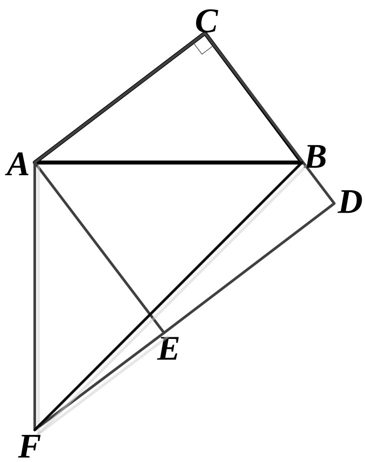
勾股定理證明-G214

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$ACDE$。

2. 延長$\overline{DE}$使$\overline{EF}=\overline{BC}$。

3. 連接$\overline{AF}$。



【求證過程】

利用作圖所產生的圖形分割，將正方形$ACDE$面積分割為兩大部分，利用圖形中三角形的全等的關係重新將正方形$ACDE$面積改寫，並計算正方形$ACDE$的面積可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形AFE全等於三角形ABC：

   因為$\overline{AE}=\overline{AC}$, $\overline{EF}=\overline{BC}$且$\angle AEF=90°=\angle ACB$，所以

   $$\Delta AFE \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   推得$\angle FAE=\angle BAC$，因此$\angle BAF=90°$.

2. 運用圖形全等改寫正方形$ACDE$面積，並計算面積：

   由圖形及第 1 點可知

$$\begin{aligned}
\square ACDE &= \Delta ABC + ABDE \\
&= \Delta AFE + ABDE \\
&= \Delta ABF + \Delta BDF \\
&= \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{DF} \\
&= \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{BC})\times(\overline{AC}+\overline{BC}) \\
&= \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}(\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)\ .
\end{aligned}$$

3. 整理第 2 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為$\square ACDE = \overline{AC}^2$，所以由第 2 點可知

$$\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2 - \frac{1}{2}\overline{BC}^2,$$

整理上式得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   F. C Boon(1924). *A Companion to Elementary School Mathematics*(104). London : New York Longmans, Green and Co..
2. 心得：此證明不同於之前必須作三個正方形，此證明簡潔且易懂，運用圖形的分割並計算面積即可得到勾股定理關係式，可讓學生嘗試。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●