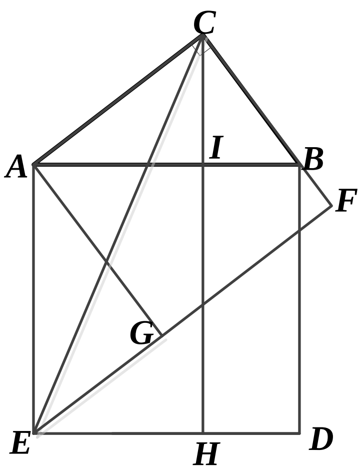
勾股定理證明-G212

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $ABDE$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $ACFG$ 。

2. 從 C 點作 $\overline{CH}$ 垂直 $\overline{DE}$ ，且 $\overline{CH}$ 交 $\overline{AB}$ 於 I 。

3. 連接 $\overline{EG}$ 。



【求證過程】

將正方形 $ABDE$ 面積視為圖形中兩長方形的和，利用圖形間等底同高推得面積關係，即可得勾股定理關係式。

1. 證明三角形 AEG 全等於三角形 ABC ：

   因為 $\angle BAC+\angle BAG=90°=\angle EAG+\angle BAG$ ，所以 $\angle EAG=\angle BAC$ ，因為 $\overline{AE}=\overline{AB}$,

   $\overline{AG}=\overline{AC}$, 及前述 $\angle EAG=\angle BAC$, 所以

   $$\Delta AEG\cong\Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   推得 $\angle AGE=90°$, 因此 $E-G-F$ 三點共線。
2. 運用圖形中等底同高的條件，找出面積關係：

   因為 $G-E-F$ 三點共線, 所以三角形 ACE 以 $\overline{AC}$ 為底邊，則對應的高為 $\overline{AG}=\overline{AC}$ ，即可得知

   $$\Delta ACE=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\square ACFG,$$

   另外 ΔACE 以 $\overline{AE}$ 為底邊則對應的高為 $\overline{EH}$ ，即可得知

   $$\Delta ACE=\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\square AEHI,$$

綜合前述兩式可推得

$$\square AEHI=\overline{AC}\times\overline{AC};$$

同理可連接$\overline{CD}$，形成三角形 BCD，則

$$\Delta BCD=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BC},$$

推得三角形 BCD 面積是邊長為 $\overline{BC}$ 的正方形面積一半，也為長方形 $BDHI$ 面積的一半，即可推得

$$\square BDHI=\overline{BC}\times\overline{BC}.$$

3. 由圖形及前述第 2 點可得：

$$\begin{aligned}\square ABDE&=\square BDHI+\square AEHI\\&=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2\ .\end{aligned}$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為$\overline{AB}$，所以由第 3 點結論可推得

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是魯米斯(E.S. Loomis)在 1934 年 3 月 2 日收到的資料，寄件者是 J. Adams 來自於荷蘭海牙，但原創作者不詳。
2. 心得：此證明若再作$\overline{CD}$連線，及以$\overline{BC}$為邊往內作一正方形，雖然圖形可能變得

   較複雜，但就證明而言若有具體的輔助線，讀者也較好閱讀，此證明沒有 太多步驟，主要也僅用到圖形間等底同高的面積關係來作證明，可引導學生去發現其中的圖形關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	