勾股定理證明-G190

【作輔助圖】

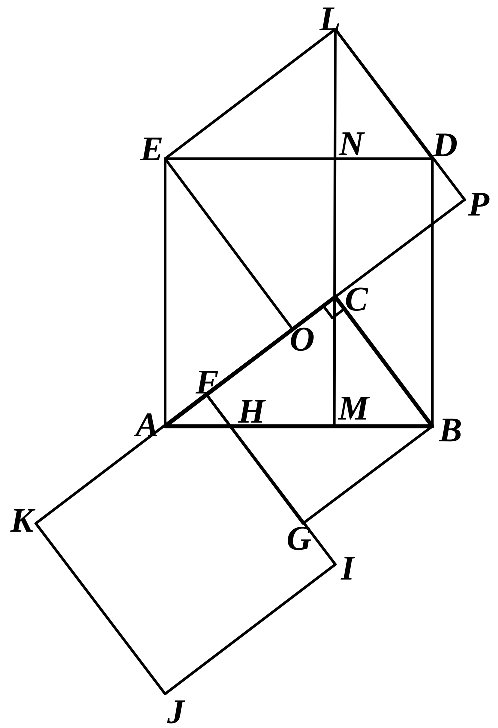
1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$ABDE$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$BCGF$，且$\overline{FG}$交$\overline{AB}$於H，延長$\overline{FG}$至I使$\overline{FI}=\overline{AC}$，以$\overline{FI}$為邊作一正方形$FIJK$。

2. 以$\overline{DE}$為邊作三角形EDL全等於三角形ABC。

3. 從L點作$\overline{LM}$垂直$\overline{AB}$，且交$\overline{DE}$於N點。

4. 從E點作$\overline{EO}$垂直$\overline{AC}$。

5. 延長$\overline{DL}$到P點，使$\overline{PL}$垂直$\overline{PC}$。



【求證過程】

將正方形$ABDE$面積視為兩長方形的和，利用圖形間的全等關係可說明前述兩長方形面積圖形相當於另外兩個正方形面積的和，得到正方形$ABDE$與另外兩個正方形的面積關係，即得勾股定理關係式。

1. 說明四邊形$BCLD$，$ACLE$為平行四邊形：

因為$\Delta EDL \cong \Delta ABC$，可知$\overline{DL}//\overline{BC}$，$\overline{EL}//\overline{AC}$，且$\overline{DL}=\overline{BC}$，$\overline{EL}=\overline{AC}$，所以可推得四邊

形 $BCLD$，$ACLE$ 皆為平行四邊形。

2. 證明三角形 EAO 全等於三角形 ABC，再由邊長對應關係計算平行四邊形 $ACLE$ 與平行四邊形 $BCLD$ 的面積：

因為 $\angle EAO + \angle BAC = 90° = \angle ABC + \angle BAC$，所以 $\angle EAO = \angle ABC$，因為 $\overline{AE} = \overline{AB}$，

$\angle EOA = 90° = \angle ACB$，及前述 $\angle EAO = \angle ABC$ 所以可得

$$\Delta EAO \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

推得 $\overline{EO} = \overline{AC}$，因此平行四邊形 $ACLE$ 以 $\overline{AC}$ 為底邊，則高為 $\overline{EO} = \overline{AC}$，可得

$$\square ACLE = \overline{AC} \times \overline{EO} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \square FIJK\ ;$$

因為 $\angle CPL + \angle EDL = 90° = \angle LED + \angle EDL$，所以 $\angle CLP = \angle DEL = \angle BAC$，因為

$\overline{CL} = \overline{BP} = \overline{AB}$，$\angle CPL = 90° = \angle ACB$，及前述 $\angle CLP = \angle BAC$，所以

$$\Delta LCP \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

推得 $\overline{CP} = \overline{BC}$，因此平行四邊形 $BCLD$ 以 $\overline{DL}$ 為底邊，則高為 $\overline{CP} = \overline{BC}$，可得

$$\square BCLD = \overline{DL} \times \overline{CP} = \overline{BC} \times \overline{BC} = \square BCFG\ .$$

3. 利用前述結論說明正方形 $ABDE$ 與另外兩個正方形的關係：
由圖形及前述第 2 點可得

$$\begin{aligned} \square ABDE &= \square BDNM + \square AENM \\ &= \square BCLD + \square AELC \\ &= \square BCFG + \square FIJK\ , \end{aligned}$$

即

$$\square ABDE = \square BCFG + \square FIJK\ .$$

4. 整理第 3 點的結果，找出直角三角形 ABC 三邊長關係：

因為正方形 $ABDE$ 邊長為 $\overline{AB}$，正方形 $BCGF$ 邊長為 $\overline{BC}$，正方形 $FIJK$ 邊長為 $\overline{AC}$，所以由第 3 點結論可得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在

1900 年 7 月 28 日想到的。

2. 心得：此證明原著並沒有作 $\overline{EO}$ 與 $\overline{CP}$ 兩條輔助線，但為了較容易看出平行四邊形的高所以決定補上兩平行四邊形的高，如此一來也會形成另一個以 $\overline{AC}$ 為邊長的正方形，因此則不須作出正方形 $FIJK$ ，也可以運用圖形等底同高的面積關係來說明勾股定理，那麼則可以發展另一個勾股定理的證明。。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	